

Meccanica del Veicolo

Teamwork Project

Gruppo 14

Anno Accademico 23/24

Ferrari F40



chairman:

Giorgio Flamini

coordinatore:

Giacomo Ferri Cataldi

sviluppo teorico:

Giacomo Ferri Cataldi, Giorgio Flamini, Davide Tribastone

implementazione:

Erick Ahmed, Marco Brignoccolo, Giacomo Ferri Cataldi, Giorgio Flamini

grafica:

Isabella Giordano, Samuele Moschini, Fabio Calabrese

report:

Mattia Boldo, Vincenzo Liberti, Marco Brignoccolo, Giacomo Ferri Cataldi, Giorgio Flamini

presentazione:

Isabella Giordano

Sommario

PREFAZIONE	5
CONTENUTO DEL REPORT	5
CENNI TECNICI.....	5
ANALISI CINEMATICA	8
INTRODUZIONE.....	8
CONSIDERAZIONI EFFETTUATE.....	9
SVILUPPO TEORICO	10
ANALISI DI POSIZIONE.....	10
ANALISI DI VELOCITÀ	11
IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE.....	13
MATLAB	13
METODO GRAFICO.....	16
ADAMS.....	17
RISULTATI.....	19
ANALISI DI POSIZIONE.....	19
ANALISI DI VELOCITÀ	22
CONCLUSIONI.....	23
ANALISI STATICA	24
INTRODUZIONE.....	24
CONSIDERAZIONI EFFETTUATE.....	24
SVILUPPO TEORICO	25
METODO GRAFICO.....	25
COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA	26
IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE.....	28
LOTUS SHARK	28
CONCLUSIONI FINALI	30
ANALISI DINAMICA.....	31
INTRODUZIONE.....	31
CONSIDERAZIONI EFFETTUATE.....	31
SVILUPPO TEORICO	32
CALCOLO ACCELERAZIONE MASSIMA	32
CALCOLO VELOCITA' MASSIMA.....	33
VALIDAZIONE	35
ACCELERAZIONE	35
VELOCITA' MASSIMA	37

RISULTATI.....	38
ACCELERAZIONE	38
VELOCITA'.....	38
CONCLUSIONI.....	39
ANALISI VIBRAZIONI	40
INTRODUZIONE.....	40
CONSIDERAZIONI EFFETTUATE.....	40
SVILUPPO TEORICO	42
IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE.....	45
RISULTATI.....	47
CONCLUSIONI.....	49
ANALISI INGRANAGGI	50
INTRODUZIONE.....	50
CONSIDERAZIONI EFFETTUATE.....	50
SVILUPPO TEORICO	51
IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE.....	55
RISULTATI.....	57
CONCLUSIONI.....	57
APPENDICI	59
APPENDICE A.....	59
APPENDICE B.....	61
APPENDICE C.....	63
BIBLIOGRAFIA.....	64

PREFAZIONE

CONTENUTO DEL REPORT

Nel seguente report i lettori si troveranno di fronte ad un'analisi riguardante la meccanica sospensiva e vibrazionale della Ferrari F40.

Nello specifico si analizzerà il sistema sospensivo anteriore studiandone il cinematismo nelle varie configurazioni che può assumere, compresa un'analisi della velocità implementata con il software MCS Adams e un'analisi statica per valutare come le forze si distribuiscono lungo le sue componenti (braccetti, ammortizzatore, telaio), verificata poi, grazie all'utilizzo del software Lotus Shark (noto anche come Lotus Suspension Analysis).

Successivamente verrà eseguita una valutazione della dinamica della vettura, nella quale si andrà a stabilire l'accelerazione teorica massima che il motore riuscirebbe a trasferire alle ruote, per poi paragonarla all'accelerazione reale che è possibile scaricare a terra per via del limite imposto dall'attrito.

Per la parte vibrazionale verrà valutata la pulsazione propria, smorzata e la trasmissibilità della sospensione della vettura trattata.

Nell'ultimo paragrafo verrà sviluppata la trattazione di una coppia di ruote dentate, in particolare le ruote dentate presenti nel cambio della nostra vettura per la seconda marcia.

CENNI TECNICI

La Ferrari F40 è la prima Ferrari stradale ad essere costruita con materiali compositi, dal kevlar al plexiglass alle resine aeronautiche. Il telaio è realizzato con tubolare in acciaio integrato con elementi in composito. La F40 è stata una delle prime Ferrari stradali dotata di motore sovralimentato con due turbocompressori IHI.

È dotata di un motore V8 a 90° "flatplane" 2.9L collocato in posizione centrale longitudinale che eroga una potenza di 478 cv (356kW) a 7000 giri/min e coppia massima 575 Nm. Il cambio è manuale a 5 marce, più retromarcia, con frizione bi-disco a secco montato longitudinalmente.

"Le sospensioni sono a ruote indipendenti, con bracci inferiori e superiori oscillanti; molle ad elica, ammortizzatori idraulici telescopici a doppio effetto e barra stabilizzatrice trasversale. Tamponi di arresto a scuotimento superiore e inferiore incorporati negli ammortizzatori. I bracci inferiori e superiori sono ancorati al telaio e al portamozzo mediante boccole elastiche che non richiedono ingrassaggio." [Fonte: *F40_Technical_Manual*].

Nella seguente tabella [Tab. 1], sono riportati alcuni valori relativi alle caratteristiche principali della vettura [Fonte: *F40_Technical_Manual*].

Tabella 1 – Dati della Ferrari F40

STRUTTURE		
	GRANDEZZA	VALORE
CARROZZERIA	Lunghezza	4358 mm
	Altezza	1124 mm
	Cofano	1048 mm
	Retro	860 mm
	Passo	2450 mm
	Carreggiata Anteriore	1594 mm
	Carreggiata Posteriore	1606 mm
	Altezza dal suolo	125 mm
MASSE	Peso a vuoto	1350 kg

PROPULSIONE		
	Architettura	V8 90° biturbo
MOTORE	Posizione	Centrale, longitudinale
	Cilindrata	2936 cm ³
	Alesaggio	82 mm
	Corsa	69.5 mm
	valvole	32, 4 per cilindro
	Rapporto di compressione	7.7:1
	Potenza max	478 cv (356 kW)
	Coppia max	575 Nm 4000 giri/min
	Trazione	RWD
	Velocità Max	313 km/h
	Alimentazione	Iniezione elettronica Weber-Marelli con doppio iniettore per cilindro
	Distribuzione	Doppio albero a camme
PRESTAZIONI	Acc. 0-100Km/h	4.56 s

SOSPENSIONI		
SOSPENSIONI	Ammortizzatore anteriore	KONI 82-8322 Coil Springs Double Wishbone
	Ammortizzatore posteriore	KONI 82-8325 Coli Springs Double Wishbone

PNEUMATICI		
RUOTE	Anteriore	Pirelli Pzero 245/40 R17
	Posteriore	Pirelli Pzero 335/35 R16

ANALISI CINEMATICA

INTRODUZIONE

L'intento di questo capitolo è mostrare il comportamento del cinematismo in questione. Come si può notare nella [Tab. 1.1] il sistema sospensivo della vettura è un *double wishbone*; esso è composto da due strutture triangolari principali, una superiore e una inferiore, e dall'ammortizzatore composto da molla elicoidale e smorzatore di oscillazioni. Le due strutture triangolari sono collegate direttamente al portamozzo della ruota e al telaio, mentre l'ammortizzatore, posto trasversalmente rispetto ai triangoli, è incernierato al triangolo inferiore e al telaio. Vedi [Fig. 1.1].



Figura 1.1 - Quadrilatero articolato

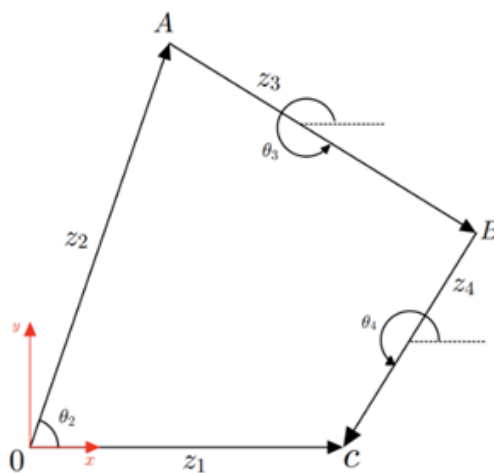


Figura 1.2 - Sistema sospensivo double wishbone

Per un'analisi efficace del cinematismo viene schematizzato il sistema sospensivo in questione con il meccanismo del quadrilatero articolato, ovvero, i triangoli e il portamozzo vengono modellati con delle barre rigide collegate l'une con le altre attraverso l'utilizzo di cerniere, di cui due connesse al telaio sempre mediante cerniere [Fig. 1.2]. Notare come il cinematismo in questione lavori nel piano, quindi è a tutti gli effetti un'analisi bidimensionale.

Nei paragrafi successivi il lettore troverà tutte le varie considerazioni e semplificazioni che sono state effettuate ai fini dello studio; l'analisi di posizione grazie alla quale vengono mostrate le varie configurazioni che il quadrilatero in questione può assumere (zona di funzionamento relativa alla vettura); ed infine l'analisi di velocità che presenta l'andamento dei movimenti dei vari braccetti.

CONSIDERAZIONI EFFETTUATE

L'analisi in questione è relativa al sistema sospensivo anteriore, le foto, i disegni tecnici, gli schemi e i vari modelli si riferiscono alla sospensione sinistra.

Consultando i manuali e osservando i disegni tecnici si può notare come il triangolo superiore sia inclinato di 7° sul piano longitudinale [Fig. 1.3], questo fa sì che il movimento della sospensione non sia un movimento planare contenuto nel piano del quadrilatero, ma tridimensionale, che aggiunge una componente di anti-dive. Quindi per semplificarne lo studio si è considerato questo angolo nullo.

Inoltre, come si può notare nella vista frontale della sospensione anteriore [Fig. 1.4], è presente anche una barra antirollio collegata al triangolo inferiore tramite una coppia rotoidale. Essa entra in funzione soltanto quanto le ruote non si trovano allo stesso livello e quindi per un comportamento simmetrico tra i due lati della vettura la sua rigidità è trascurabile, in quanto tendente a infinito, e si è deciso di non tenerne conto.

Per ricavare le dimensioni dei vari componenti si è preso come riferimento una quota presente nel disegno tecnico [Fig. 1.4] di 261 mm, grazie alla quale è stato stabilito un fattore di conversione dimensionale tra le misure prese direttamente dal disegno tecnico e le quote reali.

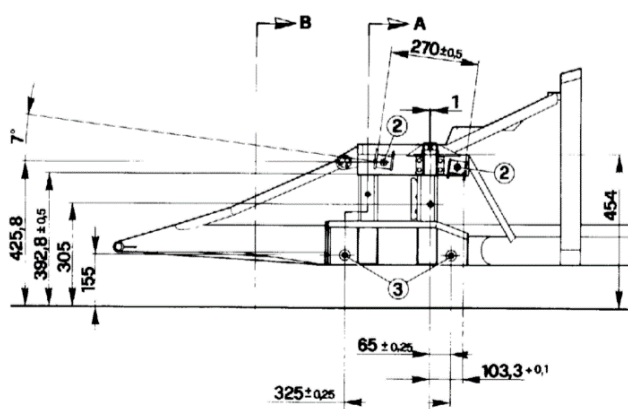


Figura 1.3 – Vista laterale telaio anteriore Ferrari F40

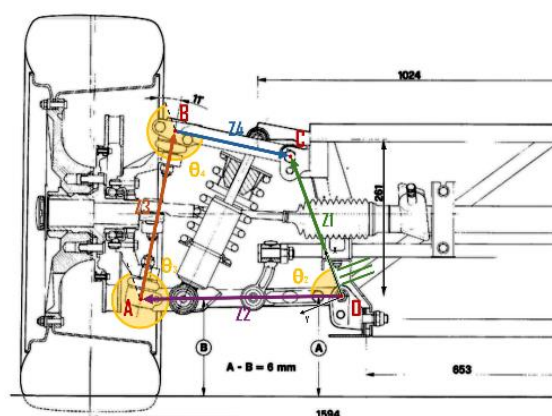


Figura 1.4 - Vista frontale schema sospensivo Ferrari

Per stabilire un punto di riferimento si è supposto che il disegno dello schema sospensivo presente in [Fig. 1.4] sia rappresentativo della configurazione di equilibrio statico in cui l'auto è appoggiata a terra. A questo punto abbiamo ricavato dal disegno tecnico le lunghezze dei vari braccetti e i valori degli angoli $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ [Tab. 1.1].

Tabella 1.1 – Lunghezze braccetti sospensione e angoli in posizione statica

Z_1	248.56 mm
Z_2	338.66 mm
Z_3	282.74 mm
Z_4	198.80 mm
θ_2	70°
θ_3	328°
θ_4	237°

SVILUPPO TEORICO

ANALISI DI POSIZIONE

Per comprendere le varie posizioni che il cinematismo in questione può assumere si deve svolgere un'analisi di posizione grazie alla quale si riuscirà a ricavare i valori di tutti gli angoli precedentemente definiti ($\theta_2, \theta_3, \theta_4$). Nel fare ciò si è deciso di posizionare il sistema di riferimento cartesiano O_{xy} con l'origine posta in corrispondenza della coda del vettore $\overline{Z_1}$, e l'asse delle ascisse e delle ordinate rispettivamente in posizione parallela e normale al vettore $\overline{Z_1}$. [Fig.1.2-1.4].

Dal punto di vista vettoriale, essendo un quadrilatero e quindi una geometria chiusa, i quattro vettori devono rispettare la seguente condizione:

$$\overline{Z_2} + \overline{Z_3} + \overline{Z_4} - \overline{Z_1} = 0 \quad (1.1)$$

Si esplicitano ora i vettori con delle equazioni scalari (1.2) proiettate lungo gli assi X e Y:

$$\begin{cases} Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4 - Z_1 \cos \theta_1 = 0 & (1.2a) \\ Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3 + Z_4 \sin \theta_4 - Z_1 \sin \theta_1 = 0 & (1.2b) \end{cases}$$

Con l'ipotesi di corpi rigidi il comportamento del cinematismo risulta indipendente dalle forze applicate, non vengono considerate le deformazioni, per cui i moduli dei vettori $\overline{Z_1}, \overline{Z_2}, \overline{Z_3}, \overline{Z_4}$ sono costanti. Il moto è piano pertanto è possibile usare l'equazione di Grübler (1.3) che definisce il numero di gradi di libertà di una catena cinematica:

$$n_{gl} = 3n_{cm} - 2c1 - c2 \quad (1.3)$$

Nel caso del quadrilatero vincolato al telaio data la presenza di 3 corpi mobili n_{cm} e di 4 coppie rotoidali $c1$ che permettono un solo moto relativo tra i corpi, si ricava che il sistema ha un solo grado di libertà. Visto che l'angolo θ_1 è nullo essendo Z_1 coincidente con l'asse x del riferimento possiamo concludere che il sistema (1.4) fornisce due equazioni in tre variabili, due di esse potranno essere espresse in funzione della terza, scelta come coordinata libera del meccanismo. Si studia il moto del meccanismo in funzione dell'angolo θ_2 di connessione del corpo 2 al telaio.

$$\begin{cases} (-Z_4 \cos \theta_4)^2 = (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3 - Z_1)^2 \\ (-Z_4 \sin \theta_4)^2 = (Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3)^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Si ricava quindi l'equazione (1.5) solo in funzione di θ_3 e θ_2 :

$$(Z_4)^2 = (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3 - Z_1)^2 + (Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3)^2 \quad (1.5)$$

A questo punto, per una maggiore comprensione dei calcoli che si andranno a svolgere, è conveniente introdurre i seguenti parametri ausiliari (1.6) e (1.7), grazie ai quali si riscrive l'equazione (1.5) come nella (1.8), che ha come unico parametro incognito θ_3 :

$$C_x(\theta_2) = Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \quad (1.6)$$

$$C_y(\theta_2) = Z_2 \sin \theta_2 \quad (1.7)$$

$$(Z_4)^2 = (C_x + Z_3 \cos \theta_3)^2 + (C_y + Z_3 \sin \theta_3)^2 \quad (1.8)$$

Sviluppando l'elevamento a potenza e utilizzando l'identità fondamentale della goniometria si ottiene l'equazione (1.9):

$$(Z_4)^2 = C_x^2 + Z_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2C_x Z_3 \cos \theta_3 + C_y^2 + Z_3^2 \sin^2 \theta_3 + 2C_y Z_3 \sin \theta_3 \quad (1.9)$$

Semplificando si ottiene:

$$(Z_4)^2 = C_x^2 + 2C_x Z_3 \cos \theta_3 + C_y^2 + Z_3^2 + 2C_y Z_3 \sin \theta_3 \quad (1.10)$$

Utilizzando i parametri ausiliari (1.11) e le seguenti identità trigonometriche (1.12) si riesce a ricondursi alla sola dipendenza dalla tangente dell'angolo θ_3 (1.13):

$$A = 2Z_3 C_x \quad B = 2Z_3 C_y \quad C = C_x^2 + C_y^2 + Z_3^2 - Z_4^2 \quad (1.11)$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1.12)$$

$$(C - A) \left(\tan^2 \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \right) + 2B \tan \left(\frac{\theta_3}{2} \right) + C + A = 0 \quad (1.13)$$

Sostituendo $\tan \frac{\theta_3}{2} = x$ si ottiene (1.14):

$$(C - A)x^2 + 2Bx + C + A = 0 \quad (1.14)$$

Da cui la soluzione:

$$\theta_3 = 2 \arctan \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}}{(C - A)} \quad (1.15)$$

L'angolo θ_4 si ricava semplicemente sostituendo θ_3 e θ_2 in una delle equazioni del sistema (1.2).

L'equazione (1.15) riconduce in condizioni normali a due possibili configurazioni, però è possibile che in alcune condizioni il discriminante risulti nullo o negativo per cui rispettivamente si ottiene una o nessuna soluzione reale. Si è verificato che il sistema ricade sempre nel caso in cui si ottengono 2 soluzioni reali, si osserverà in seguito che in realtà una soluzione è da scartare perché non coerente con il funzionamento del cinematismo in analisi.

ANALISI DI VELOCITÀ

Una volta determinate le equazioni con le quali è possibile stabilire gli angoli delle varie configurazioni che il meccanismo può assumere, è possibile anche andare a sviluppare l'analisi relativa alle velocità con cui i vari organi si muovono quando il sistema è soggetto ad una variazione di posizione. La formulazione matematica dell'analisi di velocità può essere svolta riprendendo le

equazioni di posizione (1.16) e derivandole rispetto al tempo (1.17). Per prima cosa occorre individuare i parametri dipendenti dal tempo, che in questo caso θ_2 , θ_3 e θ_4 :

$$\begin{cases} f_1 = Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4 - Z_1 = 0 \\ f_2 = Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3 + Z_4 \sin \theta_4 = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Preso ora il sistema lungo gli assi x e y (1.16) procediamo a derivarlo rispetto al tempo (1.17):

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = (-Z_3 \cdot \sin \theta_3) \cdot \omega_3 + (-Z_4 \cdot \sin \theta_4) \cdot \omega_4 + (-Z_2 \sin \theta_2) \cdot \omega_2 \\ \frac{df_2}{dt} = (Z_3 \cdot \cos \theta_3) \cdot \omega_3 + (Z_4 \cdot \cos \theta_4) \cdot \omega_4 + (Z_2 \cos \theta_2) \cdot \omega_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

A questo punto, come per l'analisi di posizione, è necessario stabilire un valore noto dal quale partire. Imponendo ω_2 come valore noto si potrà ricavare le altre due velocità angolari ω_3 , ω_4 . Inoltre, anche in questo caso, per una maggiore comprensione dei calcoli che si andranno a svolgere, è conveniente introdurre i seguenti parametri (1.18):

$$A_1 = Z_2 \sin \theta_2 \cdot \omega_2 \quad (1.18)$$

$$A_2 = Z_2 \cos \theta_2 \cdot \omega_2$$

$$B_1 = Z_3 \sin \theta_3$$

$$B_2 = Z_3 \cos \theta_3$$

$$C_1 = Z_4 \sin \theta_4$$

$$C_2 = Z_4 \cos \theta_4$$

Posti quindi i parametri costanti (1.18) si ottengono (1.19) dipendente solo da ω_3 e ω_4 :

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = A_1 + B_1 \cdot \omega_3 + C_1 \cdot \omega_4 = 0 \\ \frac{df_2}{dt} = A_2 + B_2 \cdot \omega_3 + C_2 \cdot \omega_4 = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Dalle relazioni (1.19) si ottengono rispettivamente ω_4 (1.20) e successivamente ω_3 (1.21):

$$\omega_4 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \quad (1.20)$$

$$\omega_3 = - \frac{C_1 \cdot \left(\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \right) + A_1}{B_1} \quad (1.21)$$

IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE

In precedenza, sono stati esposti i metodi matematici grazie ai quali è possibile effettuare l'analisi esatta di posizione e velocità. Il metodo analitico risulta di difficile applicazione, quindi per automatizzare il processo di calcolo, si è scelto di sviluppare alcuni metodi alternativi di risoluzione del problema.

Il primo metodo alternativo utilizzato sfrutta il software numerico MATLAB, con il quale si è realizzato uno script in grado di effettuare un'analisi sia della posizione che della velocità del quadrilatero. I risultati ottenuti dal programma MATLAB verranno poi validati mediante un confronto con i valori ottenuti nel calcolo analitico in alcune specifiche configurazioni.

È possibile, inoltre, applicare due ulteriori metodi per il calcolo della velocità, attraverso il software Adams View e attraverso il metodo grafico. I risultati ottenuti anche in questo caso andranno a validare ulteriormente le velocità angolari ottenute con i precedenti metodi di risoluzione.

MATLAB

L'intento è quello di creare un programma automatizzabile, per tale scopo si andrà ad utilizzare il metodo di Newton che però prevede una metodologia di calcolo differente. Innanzitutto, si considera un unico vettore di $\bar{f}$ funzioni:

$$\bar{f}(\overline{y(t)}, \overline{x(t)}, \bar{P}) = \bar{0} \quad (1.22)$$

La (1.22) dipende da $y(t)$ il vettore delle variabili incognite, $x(t)$ il vettore di coordinate libere e P il vettore dei parametri. Sfruttando le considerazioni fatte nello sviluppo teorico si ricava che:

$$\bar{x} = \{\theta_2\} \bar{y} = \left\{ \begin{matrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix} \right\} \bar{P} = \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_1\} \quad (1.23)$$

Scrivendo le (1.16) in forma vettoriale:

$$\bar{f}(\bar{\theta}) = \begin{Bmatrix} f1(\bar{\theta}) \\ f2(\bar{\theta}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1(\theta_3, \theta_4) \\ f2(\theta_3, \theta_4) \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

A questo punto, invece di procedere risolvendo il sistema come è stato fatto nello sviluppo teorico si ipotizza che esista la soluzione esatta $\bar{\theta}^*$ tale che:

$$\bar{f}(\bar{\theta}^*) = \bar{0} \quad (1.25)$$

Sia $\hat{\theta}$ un qualunque vettore detto “seed”, ovvero si impostano dei valori degli angoli θ_3 e θ_4 che ipoteticamente potrebbero essere soluzione del sistema. Chiaramente è praticamente impossibile trovare la soluzione in tale modo per cui quantifico la distanza dalla soluzione esatta mediante:

$$\Delta \bar{\theta} = \bar{\theta}^* - \hat{\theta} \quad (1.26)$$

Dalla (1.26) si può quindi ricavare la soluzione esatta in funzione della differenza definita in precedenza:

$$\bar{\theta}^* = \hat{\theta} + \Delta \bar{\theta} \quad (1.27)$$

per cui si avrà che:

$$\bar{f}(\bar{\theta}^*) = \begin{Bmatrix} f1(\bar{\theta}_3 + \Delta\theta_3, \bar{\theta}_4 + \Delta\theta_4) \\ f2(\bar{\theta}_3 + \Delta\theta_3, \bar{\theta}_4 + \Delta\theta_4) \end{Bmatrix} = \bar{0} \quad (1.28)$$

Linearizzando la (1.28) e sviluppando $\bar{f}$ in serie di Taylor:

$$\bar{f}(\bar{\theta}^*) = \bar{f}(\hat{\theta}) + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix}_{\bar{\theta}=\hat{\theta}} \right\} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{Bmatrix} + \dots = \bar{0} \quad (1.29)$$

Troncando lo sviluppo di Taylor non è possibile avere la soluzione esatta e pertanto si ottiene:

$$\bar{f}(\hat{\theta}) + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix}_{\bar{\theta}=\hat{\theta}} \right\} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{Bmatrix} = \varepsilon \quad (1.30)$$

Dove ε è un numero molto piccolo che con il processo iterativo tenderà a zero. Riscrivo la (1.30) tenendo conto della (1.26) e nominando con J_K la matrice Jacobiana.

$$\bar{f}(\hat{\theta}) + J_K(\bar{\theta}^* - \hat{\theta}) = \varepsilon \quad (1.31)$$

A questo punto trascurando ε si ricava la soluzione approssimata. Si nota che ε indica la precisione richiesta nella soluzione, la cui sarà pertanto approssimata.

$$\bar{\theta}_{APPROX}^* = \hat{\theta} + J_K^{-1} \bar{f}(\hat{\theta}) \quad (1.32)$$

Lo script MATLAB prende la (1.32) e sviluppa un processo iterativo in cui si calcola $\bar{\theta}_{APPROX}^*$:

$$\hat{\theta} = \bar{\theta}_{APPROX}^* \quad (1.33)$$

si riesegue il calcolo fino a che non si giunge al valore di tolleranza ε desiderato.

Nelle [Fig.1.5] viene riportato il diagramma di flusso del programma MATLAB che sviluppa il calcolo della posizione degli angoli θ_3 e θ_4 .

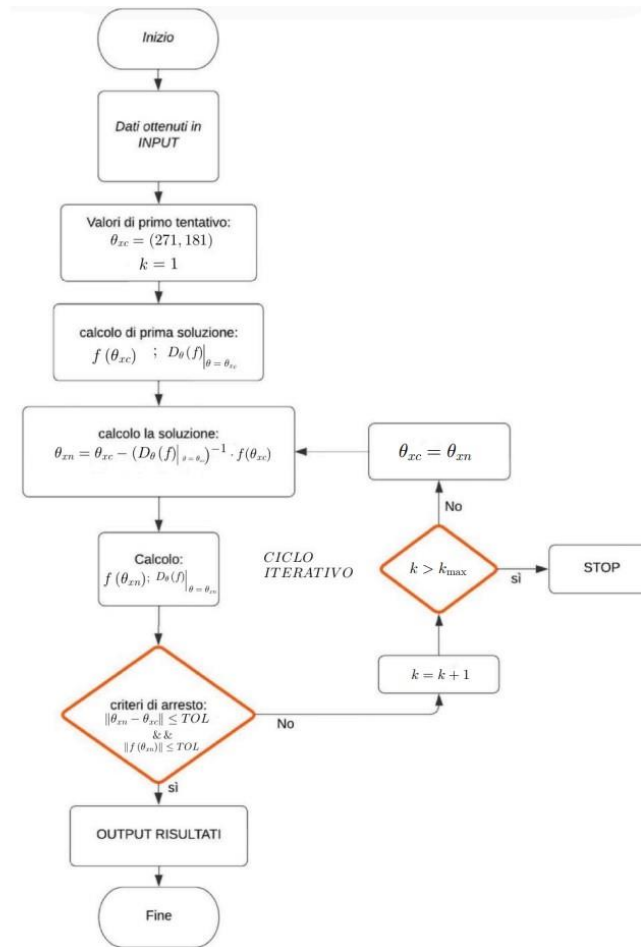


Figura 1.5 – Diagramma di flusso analisi di posizione

In [Appendice A] viene riportato il codice MATLAB.

Per l'**analisi di posizione** in questione è stato utilizzato un range del valore dell'angolo θ_2 compreso tra 45° e 90° (i seguenti valori sono stati scelti aumentando il reale campo di funzionamento della sospensione, il quale verrà analizzato nel dettaglio nel capitolo della Statica).

Riguardo l'analisi di velocità si parte dalla (1.22), derivandola:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} \dot{\bar{y}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} = 0 \quad (1.34)$$

Y è nota dall'analisi di posizione, x è imposta, sono note anche f e le sue Jacobiane per cui l'analisi di velocità si ottiene da semplici operazioni di derivazione e inversione delle matrici.

$$\dot{\bar{y}} = - \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right] \dot{\bar{x}} \quad (1.35)$$

Per l'**analisi di velocità** in questione è stato utilizzato un range del valore dell'angolo θ_2 compreso tra 45° e 90° , e il codice MATLAB che sviluppa le velocità angolari è riportato in [Appendice A].

METODO GRAFICO

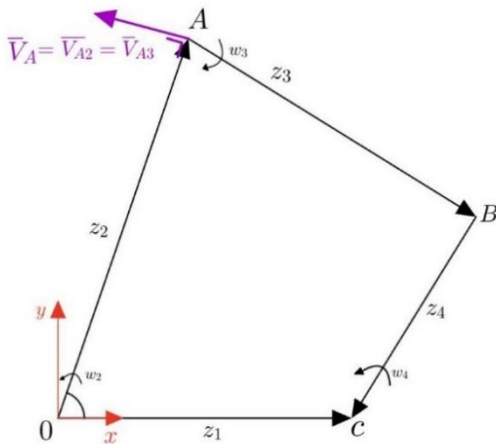


Figura 1.6 - Analisi velocità quadrilatero articolato

Di seguito viene presentato il metodo grafico per l'analisi di velocità a partire dalle relazioni base della cinematica dei corpi rigidi. Il collegamento tra i vari corpi Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 avviene attraverso coppie rotoidali. Pertanto, esiste un punto in comune che per costruzione dovrà assumere la stessa velocità assoluta per i 2 corpi collegati.

In analogia con ciò che stato discusso per l'analisi di posizione per svolgere l'analisi della velocità è necessario scegliere il valore della variabile arbitraria. Per il meccanismo in esame è necessario imporre la velocità angolare di Z_2 ovvero si assume nota ω_2 .

Essa è stata ricavata supponendo di avere un angolo di partenza $\theta_2 = 70^\circ$ ed una variazione angolare $\Delta\theta_2 = 5^\circ$ nell'arco di $\Delta t = 0.15s$.

$$\text{Da cui si ricava } \omega_2 = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} \frac{2\pi}{360} = 0.582 \frac{\text{rad}}{s}$$

Preso O come punto fisso del sistema di riferimento è possibile determinare la velocità assoluta del punto A, essendo in comune tra i corpi Z_2 e Z_3 vale la relazione (1.36):

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{A2} = \bar{V}_{A3} = \bar{V}_0 + \omega \times (A - O) = \omega_2 \times Z_2 = 197,1 \frac{\text{mm}}{s} \quad (1.36)$$

Ora applicando il metodo grafico è possibile tracciare il triangolo delle velocità avendo un vettore noto $\bar{V}_A$, la perpendicolare a Z_3 (direzione $\bar{V}_{rB-A}$) e la perpendicolare a Z_4 (direzione $\bar{V}_{rB-C}$).

A questo punto graficamente si possono ricavare $\bar{V}_{rB-A}$ e $\bar{V}_{rB-C}$ [Fig.1.9].

- $\bar{V}_{rB-A} = 42.47 \frac{\text{mm}}{s}$
- $\bar{V}_{rB-C} = 192.69 \frac{\text{mm}}{s}$

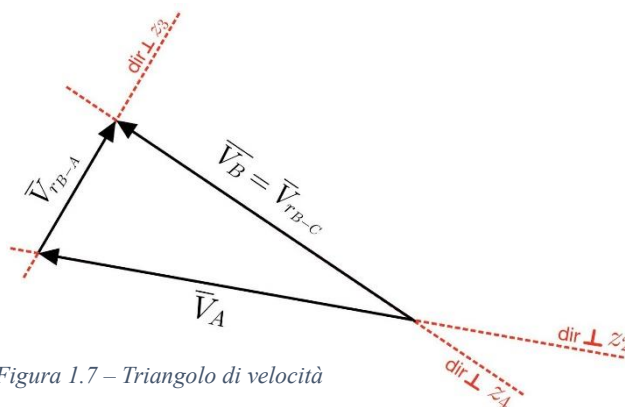


Figura 1.7 – Triangolo di velocità

Si ricava la velocità angolare del corpo Z_3 :

$$\omega_3 = \frac{\bar{V}_{rB-A}}{Z_3} = 0.150 \frac{rad}{s} \quad (1.37)$$

e la velocità angolare del corpo Z_4 :

$$\omega_4 = \frac{\bar{V}_{rB-C}}{Z_4} = 0.969 \frac{rad}{s} \quad (1.38)$$

Infine, per determinare la velocità assoluta del punto B viene utilizzata la relazione (1.39):

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{B4} = \bar{V}_C + \omega_4 \times (B - C) = -\omega_4 \times Z_4 = \bar{V}_{rB-C} = 192.69 \frac{mm}{s} \quad (1.39)$$

ADAMS

Per l'analisi della velocità si è deciso di svolgere uno studio più dettagliato grazie all'utilizzo del software Adams View; infatti, grazie ad esso è stato possibile convalidare i risultati ottenuti e trovare nuove informazioni.

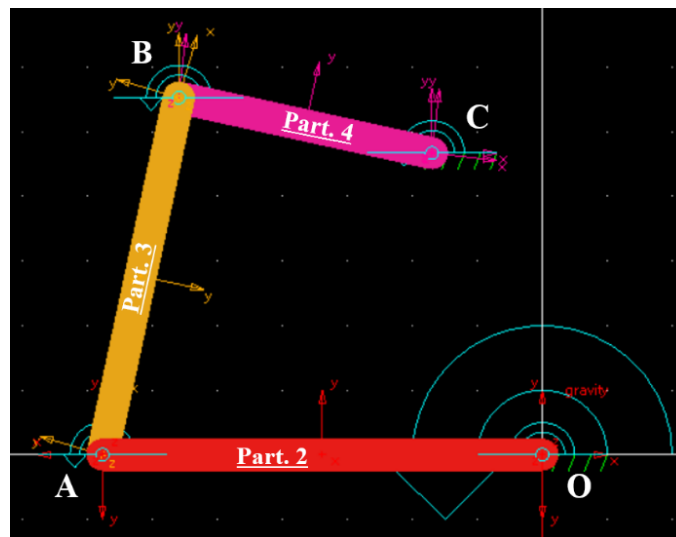


Figura 1.8 – Quadrilatero articolato su Adams

Innanzitutto, si è deciso di effettuare due studi, uno con rotazione positiva (senso antiorario) e uno con rotazione negativa (senso orario), entrambi partendo dalla configurazione statica ($\theta_2 = 70^\circ$). È stato imposto il movimento $y(t) = \omega_2 \cdot t$, con $\omega_2 = \text{cost.} = 0.5818 \frac{rad}{s}$, alla cerniera in O, coerentemente con quanto fatto precedentemente (vedi analisi di velocità MATLAB). Si specifica che il tempo della simulazione è stato appositamente scelto per evitare di oltrepassare il limite imposto dalla geometria dei braccetti, i quali altrimenti si romperebbero andando a invalidare la simulazione. È fondamentale specificare il punto di applicazione del movimento in quanto si è notato che andando ad applicarlo al punto C invece che al punto O, il range delle possibili configurazioni che il cinematismo può assumere cambia. Infatti, con la rotazione fissata in O il cinematismo si va a

bloccare nella configurazione rappresentata dall'immagine [Fig.1.9], ovvero quando i braccetti 3 e 4 vanno ad allinearsi. Mentre se fosse posizionato nella cerniera C il moto proseguirebbe, in quanto la forza che farebbe muovere i braccetti 3 e 4 si troverebbe nel punto B, e non nel punto A come nel primo caso, e non ci sarebbe nessun vincolo a bloccarla.



Figura 1.9 - Configurazione limite quadrilatero con rotazione in O

Tabella 1.2 – Correlazione tra i nomi dei punti su Adams e quelli del quadrilatero

MARKER 1	Punto O
MARKER 2 = MARKER 3	Punto A
MARKER 4 = MARKER 5	Punto B
MARKER 6	Punto C

Un'altra importante osservazione riguarda l'analisi della velocità dei vari corpi e vincoli. Come si può notare dai grafici sottostanti [Fig.1.10], [Fig.1.11] l'andamento delle velocità ω_3 e ω_4 non sono costanti, e cambiano tra il caso in cui il movimento è orario e quello antiorario.

Ci sono due punti di particolare interesse. Per quanto riguarda il caso orario, si può notare come la velocità angolare, e quindi anche quella assoluta, del corpo 4, varino molto velocemente passando dal massimo valore a zero in poco più di un secondo, rimanendo nulla o comunque prossima ad essa per una considerevole finestra temporale. Questo è dovuto al fatto che in quel range di tempo i 3 braccetti si trovano molto vicini e sovrapposti l'uno con l'altro, andando di fatto a far coincidere nello stesso punto la cerniera B con il CIR (Centro d'Istantanea Rotazione) determinato dalle rette passanti per il corpo 2 e il corpo 4 [Fig.1.12].

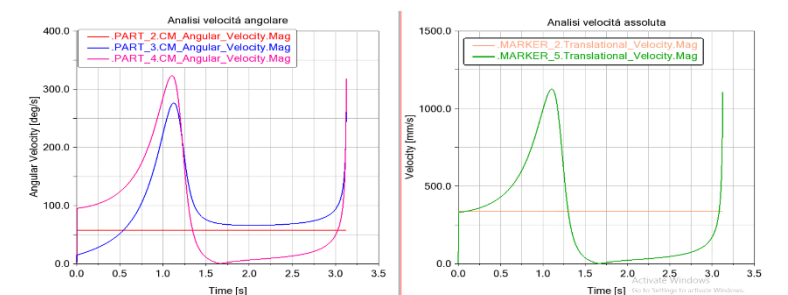


Figura 1.10 - Andamento velocità angolari e assolute partendo dalla configurazione statica e muovendosi in senso orario

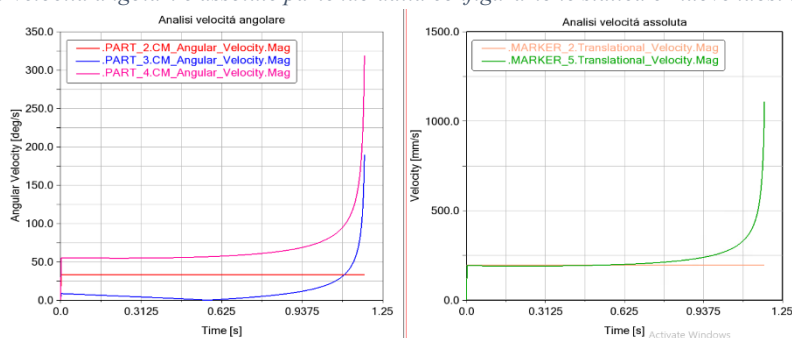


Figura 1.11 - Andamento velocità angolari e assolute partendo dalla configurazione statica e muovendosi in senso antiorario

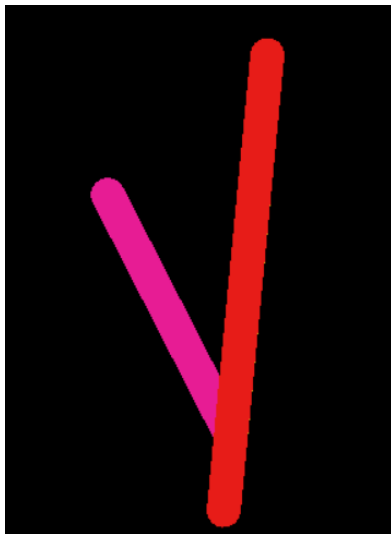


Figura 1.12 - Configurazione con velocità angolare ω_4 e assoluta $\bar{V}_B$ pari a zero



Figura 1.13 - Configurazione con velocità angolare ω_3 pari a zero

L'altro punto in questione riguarda il caso antiorario, infatti l'andamento di ω_3 (curva in blu) è decrescente con un punto in cui si annulla. Quel punto corrisponde all'istante mostrato in [Fig.1.13] dove l'angolo $\theta_2 = 90^\circ$, infatti il braccetto 2 essendo parallelo al 4 determina la posizione del CIR tendente ad infinito in quell'istante, il che fa annullare ω_3 .

RISULTATI

ANALISI DI POSIZIONE

Si considera il quadrilatero articolato rappresentato in [Fig. 1.2]; si impongono le dimensioni come da [Tab.1.1]; si impongono al movente (membro 2) una determinata posizione: $\theta_2 = 63^\circ$. L'equazione (1.15) riconduce in condizioni normali a due possibili risultati, però è possibile che in alcune condizioni il discriminante risulti nullo o negativo per cui rispettivamente si ottiene una o nessuna soluzione reale. Dalla (1.15) Otteniamo:

$$\theta_3 = -110.806^\circ \quad \theta_3 = -34.308^\circ = 325.69^\circ$$

Si calcolano i rispettivi angoli θ_4 della soluzione $\theta_3 = 325.69^\circ$ per verificare che sia coerente con la geometria del quadrilatero.

Dalla (1.2a) otteniamo:

$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{Z_1 - Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{Z_4} \right) = 134.26^\circ \quad (1.40)$$

Ricordando che: $\cos(x) = \cos(2\pi - x) \Rightarrow \theta_4 = 225.74^\circ$

Dalla (1.2b) otteniamo:

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3}{-Z_4} \right) = -45.74^\circ \quad (1.41)$$

Ricordando che: $\sin(-x) = \sin(\pi + x) \Rightarrow \theta_4 = 225.74^\circ$.

I valori di θ_4 coincidono, questa soluzione è accettabile e identifica la posizione del quadrilatero.

Nella [Tab.1.2] si riportano i valori coerenti con il funzionamento della sospensione delle tre configurazioni notevoli.

Tabella 1.3 - Posizione del quadrilatero in 3 configurazioni

$\theta_2 = 80^\circ$ (total rebound)	
θ_3	329,77°
θ_4	254,07°
$\theta_2 = 63^\circ$ (total bump)	
θ_3	325,69°
θ_4	225,75°
$\theta_2 = 70^\circ$	
θ_3	327,85°
θ_4	237,56°

È possibile dimostrare che $\theta_3 = -110.806^\circ$ risulta non funzionale nel caso di una sospensione pur essendo matematicamente corretto:

Si calcolano i rispettivi angoli θ_4 , della soluzione $\theta_3 = -110.806^\circ$

Dalla (1.2a) si ottiene:

$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{Z_1 - Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{Z_4} \right) = -10.86^\circ \quad (1.42)$$

Dalla (1.2b) si ottiene:

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{Z_2 \sin \theta_2 + Z_3 \sin \theta_3}{-Z_4} \right) = -10.86^\circ \quad (1.43)$$

Calcolo degli angoli del cinematismo: Quadrilatero Articolato

$\theta_2 = 63$

θ_3 calcolato = 969.1942

θ_4 calcolato = -10.8568

Numero di iterazioni 12

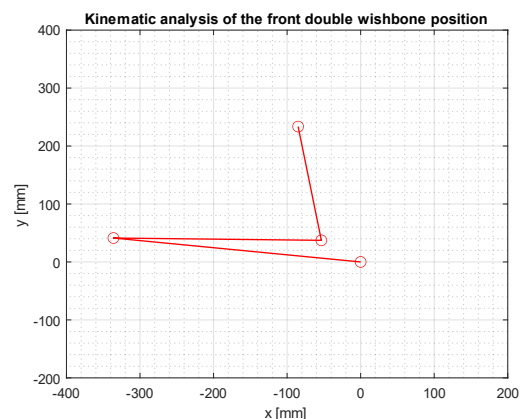


Figura 1.14 – Risultati MATLAB per $\theta_3 = 969.194 - (360 \times 3) = -110.806^\circ$

Figura 1.15 – Configurazione del quadrilatero non funzionale

Il valore analitico calcolato corrisponde a quello ricavato su MATLAB [Fig. 1.14] e come si osserva nella [Fig. 1.15] questa soluzione matematica non corrisponde ad un movimento reale del meccanismo.

Ora riportiamo l'approccio numerico tramite MATLAB. Utilizziamo il procedimento numerico descritto in precedenza con $\theta_2 = 63^\circ$. Un primo tentativo è eseguito imponendo i seguenti valori iniziali: $\hat{\theta} = [271^\circ, 181^\circ]$. Si vede come la soluzione converga rapidamente.

Tabella 1.4 – Convergenza della soluzione con MATLAB

iterazioni	θ_3	θ_4	$\bar{f}1$	$\bar{f}2$
partenza	271°	181°	-288.6468	15.58
prima	329.43	186.94	-48.7158	133.92
seconda	340.14	239.03	68.80	35.21
terza	326,59	223.54	-2.91	9.11
quarta	325.72	225.74	0.0784	0.1206
quinta	325.69	225.75	$-2.99 * 10^{-5}$	$2.05 * 10^{-5}$

Confrontando le tabelle [Tab.1.2] e [Tab.1.3] si osserva che i risultati numerici e analitici sono identici, ciò potrebbe sembrare strano poiché la soluzione numerica teoricamente non è esatta ma, è possibile ottenere dei valori corretti con una accuratezza determinata dalla tolleranza imposta che nel nostro caso è pari a $\bar{f}1 < 1 * 10^{-2}$ e $\bar{f}2 < 1 * 10^{-2}$, come si può notare nella [Tab.1.4] in cui è mostrato il funzionamento del programma MATLAB. Di seguito sono rappresentati i risultati generali dello studio. Nella figura [Fig. 1.16] si osserva il moto dei braccetti, andando oltre le configurazioni di full bump e full rebound.

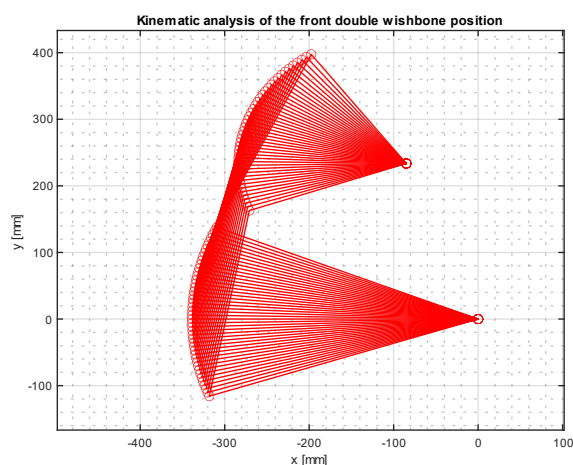


Figura 1.16 – Posizioni del quadrilatero

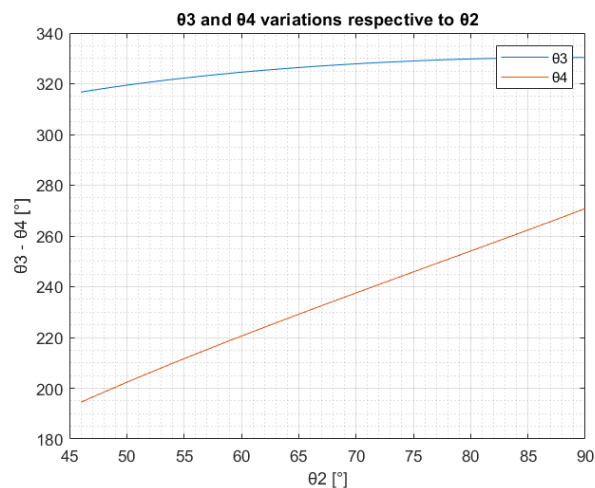


Figura 1.17 – Variazione di θ_3 e θ_4 rispetto θ_2

ANALISI DI VELOCITÀ

Per il calcolo della velocità attraverso il metodo analitico si utilizzano le (1.20) e (1.21) supponendo di avere un angolo di partenza $\theta_2 = 70^\circ$ e ipotizzando di avere la stessa velocità angolare calcolata durante il metodo grafico per l'analisi della velocità, $\omega_2 = 0.582 \frac{rad}{s}$.

$$\omega_4 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} = 0,969 \frac{rad}{s} \quad (1.44)$$

$$\omega_3 = - \frac{C_1 \cdot \left(\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \right) + A_1}{B_1} = 0,150 \frac{rad}{s} \quad (1.45)$$

```
Calcolo delle velocità angolari del cinematismo: Quadrilatero Articolato
Inserisci il valore di θ2 di partenza: 70
inserisci il valore θ2 finale: 75
inserisci Δt in secondi: 0.15
Velocità angolare [rad/s] w2=    0.5818

Velocità angolare [rad/s] w3=    0.1502

Velocità angolare [rad/s] w4=    0.9689
```

Figura 1.18 - Risultati MATLAB analisi velocità

Tabella 1.5 – Risultati ottenuti attraverso l'analisi grafica

$\Delta\theta_2 = 5^\circ$	
ΔT	0.15s
ω_2	0.582 rad/s
ω_4	0.969 rad/s
ω_3	0.150 rad/s

I risultati ottenuti [Fig. 1.18] dall'analisi di velocità MATLAB sono stati verificati attraverso il confronto con i valori di [Tab.1.5].

Nello specifico confrontando le velocità angolari dei singoli corpi, si nota che imponendo una velocità $\omega_2 = costante$, ω_3 avrà in generale una velocità variabile, la stessa considerazione può essere fatta per ω_4 come si nota nella figura [Fig. 1.18 e 1.19]. Quindi mantenendo una velocità $\omega_2 = costante$ la velocità degli altri angoli dipende dalla configurazione di θ_2 di partenza.

```
Calcolo delle velocità angolari del cinematismo: Quadrilatero Articolato
Inserisci il valore di θ2 di partenza: 63
inserisci il valore θ2 finale: 68
inserisci Δt in secondi: 0.15
Velocità angolare [rad/s] w2=    0.5818

Velocità angolare [rad/s] w3=    0.2099

Velocità angolare [rad/s] w4=    0.9980
```

Figura 1.19 - Analisi della velocità in una diversa configurazione del quadrilatero

CONCLUSIONI

Alla fine di questa trattazione si traggono alcune conclusioni: si è iniziato lo studio analizzando la sospensione come un sistema meccanico ad un grado di libertà costituito dal quadrilatero articolato. Per l'analisi di posizione abbiamo utilizzato due diversi metodi di calcolo (analitico e numerico tramite MATLAB); che alla fine hanno portato ai medesimi risultati validando il nostro modello. I valori ottenuti matematicamente per la configurazione di equilibrio statico ($\theta_2 = 70^\circ$) in cui l'auto risulta semplicemente appoggiata al suolo, sono identici a quelli che si possono misurare dal disegno tecnico della sospensione [F40_Technical_Manual]. Infine, si ricava che l'escursione massima della sospensione è limitata, compatibilmente con la tipologia di veicolo. Si nota inoltre che l'inclinazione del braccetto Z_3 su cui è vincolato il mozzo supposto solidale con esso, non è costante, ciò comporta una variazione dell'angolo di camber che va ad aumentare con la compressione della sospensione. Si stima una variazione massima del camber durante la marcia di circa $\pm 2^\circ$, un valore attendibile che si va a sommare al camber negativo $-1,10^\circ/-1,30^\circ$ previsto dall'assetto standard dell'auto [F40_Technical_Manual].

Per quanto riguarda l'analisi di velocità del quadrilatero invece sono stati sviluppati tre metodi di risoluzione (grafico, analitico/MATLAB e con Adams View) che anche in questo caso hanno portato alle medesime soluzioni validando il modello della velocità.

ANALISI STATICA

INTRODUZIONE

In questo capitolo si andrà ad effettuare un'analisi statica sul modello sospensivo discusso fino a questo punto. L'analisi statica consiste nell'andare a valutare le direzioni, i versi e i moduli delle forze che si scaricano sulle varie componenti della sospensione, e sul telaio. L'interesse principale sarà quello di andare a stabilire un valore di rigidità a terra della vettura, rigidità che varia in base allo spostamento che la sospensione deve compiere, correlato all'intensità della perturbazione della forza esterna che trasmette il terreno, come reazione, al mozzo della ruota.

Questa rigidità verrà poi linearizzata tra due configurazioni di interesse e verrà utilizzata in un modello [Fig. 2.1] che sarà successivamente analizzato nel capitolo vibrazionale (p. 39).

Per svolgere questo studio sono stati utilizzati i seguenti software: Lotus Shark, Solidworks, MATLAB.

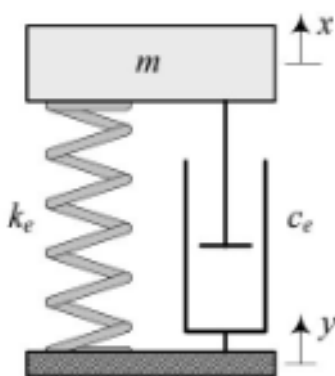


Figura 2.1 – Modello semplificato molla e smorzatore

CONSIDERAZIONI EFFETTUATE

Nella seguente trattazione sono state utilizzate le ipotesi sotto riportate:

- Corpi rigidi; i corpi risultano indeformabili sotto l'azione delle forze, quindi ad esempio, la forza di contatto tra pneumatico e terreno, che viene poi scaricata sul mozzo della ruota, è la stessa in quanto non viene utilizzata energia per deformare i corpi.
- Molla lineare; la sua rigidità è costante quindi è utilizzabile la legge di Hooke, $F = kx$
- Forza risultante sul mozzo della ruota sempre verticale rispetto al terreno
- Ammortizzatore modellato con sola molla
- Sistema meccanico analizzato senza la presenza di attrito

SVILUPPO TEORICO

Il capitolo si divide in due parti, nella prima si mostra lo svolgimento del problema tramite analisi grafica, la quale permette di visualizzare lo stato di equilibrio e ottenere una migliore comprensione fisica del funzionamento del sistema, ed una seconda finalizzata a ricavare la costante elastica della molla.

METODO GRAFICO

La seguente trattazione per l'analisi statica attraverso la metodologia grafica è stata sviluppata con il software di modellazione grafica Solidworks.

Partendo dal presupposto che le forze sono dei vettori applicati, l'analisi in questione viene svolta tracciando le relative costruzioni grafiche su un piano del software, e una volta determinate tutte le loro direzioni, si può intuire come il problema in questione sia riconducibile al "Problema delle tre forze"; quindi verranno rappresentati i triangoli di chiusura di esse. Trattandosi appunto di un metodo grafico, si dovrà definire una scala di conversione da mm a N, in modo da risalire ai moduli dell'intensità dei vettori misurando direttamente la lunghezza di essi.

Da notare che oltre al quadrilatero è stato aggiunto un ulteriore elemento che rappresenta la funzione del gruppo molla ammortizzatore. Come si può vedere dalla [Fig.2.2] tracciate le direzioni delle forze in gioco si parte dalla forza F che agisce sul mozzo, la si interseca con la retta passante per il corpo 4, e dal punto di intersezione si traccia un'altra retta passante per la cerniera che collega il corpo 2 al corpo 3. Grazie a ciò, come si vedrà a breve, sarà possibile chiudere il primo triangolo delle forze. Per il secondo si utilizza l'ultima retta appena descritta, la si interseca con la direzione della forza elastica della molla F_s , e si conclude con la retta che passa per questa intersezione e l'attacco a telaio del corpo 2.

La costruzione dei poligoni di chiusura è stata possibile imponendo un parallelismo tra i lati dei triangoli e le rispettive direzioni delle forze individuate sul quadrilatero, concetto mostrato in [Fig.2.2]. La direzione della forza $\overline{F}$ è nota, il corpo 4 consiste in una bielletta che non essendo caricata esternamente può reagire solamente con una forza F_{43} in direzione della bielletta stessa, le due direzioni descritte in precedenza mi permettono di trovare F_{23} imponendo il passaggio per il punto A. In tale modo ho trovato la prima equazione di chiusura.

$$\overline{F} + \overline{F_{43}} + \overline{F_{23}} = \overline{0} \quad (2.1)$$

Per risolvere il problema devo sfruttare la direzione della forza F_{23} sapendo poi che per equilibrio

$$\overline{F_{32}} = \overline{F_{23}} \quad (2.2)$$

E visto che la direzione di F_s è nota imponendo il passaggio per il punto O determino $\overline{F_{12}}$ e trovo la seconda equazione di chiusura

$$\overline{F_s} + \overline{F_{32}} + \overline{F_{12}} = \overline{0} \quad (2.3)$$

Per stabilire il fattore la relazione tra lunghezza del vettore e forza reale, è necessario conoscere almeno l'intensità di una forza, in modo tale da potersi ricavare tutti gli altri valori; in questo caso l'incognita risulta essere F , mentre F_s , una volta misurato lo spostamento della molla attraverso la linea che modella l'ammortizzatore, può essere calcolato con la Legge di Hooke.

Per andare a cambiare configurazione è sufficiente variare l'angolo tra il corpo 1, che rimane sempre fisso al telaio, e il corpo 2 [Fig.2.3]. Cambiando l'angolo si riscontra un effettivo accorciamento/allungamento dell'elemento che modella il gruppo molla-ammortizzatore, misurata questa variazione attraverso la Legge di Hooke (2.7) è possibile ricavarsi la forza che esercita la molla, F_s ; in questo modo andando a quotare quel vettore nel disegno, i triangoli di chiusura cambiano le loro dimensione andando di fatto a stabilire tutti i moduli delle forze che ci interessano.

COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA

In questo paragrafo si svolgerà il calcolo della costante elastica della molla.

Facendo riferimento al manuale [F40_Technical_Manual] sono state ricavate le dimensioni caratteristiche della molla [Tab 2.1], mentre per quanto riguarda il materiale è stato considerato un acciaio per molle al carbonio EN 10270-1 classe DH [Fonte: Mollificiomodenese] del quale sono riportate nella tabella sottostante [Tab 2.1] le caratteristiche.

Tabella 2.1 - Valori caratteristici della molla

Lunghezza molla conf. Statica con precarico	L	161,56 mm
Precarico	p	20 mm
Raggio molla	R	33 mm
Sezione del filo	D	12 mm
Numero delle spire	n	7,5
Modulo di Young	E	210000 MPa
Modulo di Poisson	v	0,29
Modulo elastico tangenziale	G	81395 MPa

Prima di procedere è bene specificare che il precarico di 20 mm non è un dato ufficiale, ma è stato ipotizzato in modo tale da avere una compressione della molla ragionevole una volta che la vettura viene appoggiata al terreno, valore che è stato calcolato e mostrato alla fine di questo paragrafo.

Si procede al calcolo della forza agente sul mozzo data dal terreno nella configurazione con $\theta_2 = 70^\circ$, conosciuto il peso della vettura dal manuale [F40_Technical_Manual] pari a 1350 kg e supponendo una ripartizione dei pesi del 42% all'anteriore e di 58% al posteriore si ottiene una forza risultante sull'assale anteriore uguale a (2.4).

$$W_f = W_t \times 0.42 = 567 \text{ kg} \rightarrow W_w = \frac{567}{2} = 283,5 \text{ kg} \quad (2.4)$$

Dove W_f è la massa sull'assale anteriore, W_t la massa totale della vettura, W_w la massa che "percepisce" la singola ruota. Da qui si può ricavare la forza F relativa a W_w (2.5):

$$F = W_w g = 283,5 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2781 \text{ N} \quad (2.5)$$

Utilizzando il metodo CAD sopra descritto, si è inserito quest'ultimo valore scalato di un fattore 10 direttamente come lunghezza del vettore F, in modo che una volta misurata la lunghezza del vettore forza F_s , moltiplicando per 10 avremmo ottenuto l'intensità della forza F_s reale.

Si trova $F_s = 4151\text{N}$, ovvero la forza esercitata dalla molla. [Fig.2.2].

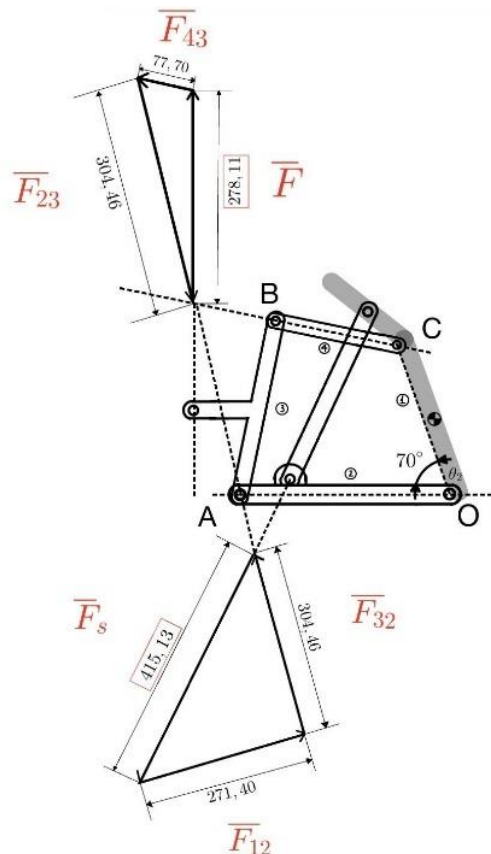


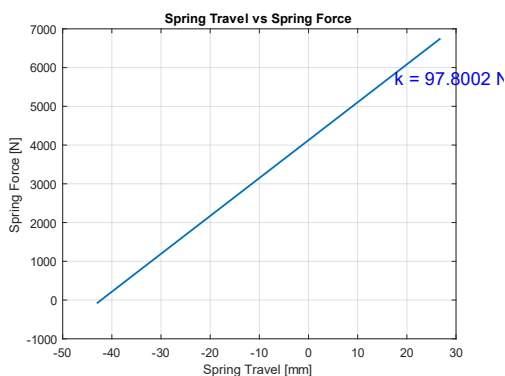
Figura 2.2 – Metodo grafico per il calcolo delle forze agenti sul quadrilatero

Ora, per calcolarsi la freccia della molla, ovvero di quanto la molla si è compressa nell'appoggiare la vettura a terra, è stato fatto riferimento al libro "Costruzione di Macchine" [A. Strozzi] utilizzando la formula (2.6) con i parametri caratteristici precedentemente esposti nella [Tab. 2.1].

$$f = \frac{64 \times F_s \times R^3 \times n}{G \times d^4} = 42,4 \text{ mm} \quad (2.6)$$

Questo spostamento tiene in considerazione anche il precarico di 20 mm, quindi l'effettiva compressione della molla quando la vettura viene appoggiata al suolo è di 22,4 mm.

Come ultimo passaggio si va a definire la costante elastica della molla (2.7) utilizzando la Legge di Hooke:



$$K = \frac{F_s}{f} = 97,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (2.7)$$

Figura 2.3 – Forza molla (F_s) su spostamento molla (f)

IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE

Lo studio teorico del cinematismo è stato implementato realizzando un modello della sospensione con il software Lotus Shark, programma utilizzato per l'analisi del comportamento delle sospensioni dei veicoli, grazie al quale si è stati in grado di comprendere al meglio il movimento, le varie configurazioni e tutte le forze che agiscono sul gruppo sospensivo della vettura. Tali dati sono stati poi elaborati tramite uno script MATLAB, consentendo di visualizzare la relazione tra le forze agenti sui vari componenti e lo spostamento della ruota dovuto allo scuotimento consentito dal cinematismo. Grazie a ciò è stato possibile il calcolo della rigidità a terra del veicolo, rigidità che dipende dallo spostamento, quindi non costante, ma linearizzata tra due configurazioni di interesse attraverso la rigidità secante

LOTUS SHARK

Note dimensioni e geometria del quadrilatero, e del gruppo molla/smorzatore, grazie all'utilizzo del software sopra citato, si è riusciti ad effettuare una modellazione della sospensione. Nel fare ciò sono state effettuate le seguenti considerazioni:

- Pneumatico indeformabile, è stata inserita una rigidità estremamente elevata (tendente a infinito) all'interno delle impostazioni del software.
- Smorzatore di oscillazioni non considerato.
- Elementi della sospensione considerati come infinitamente rigidi e di spessore nullo, infatti il software effettua un'analisi cinematica senza considerare la componente strutturale del meccanismo.
- Semplificazione bidimensionale; infatti, il programma lavora nel campo tridimensionale, ma i vari punti per la creazione degli elementi della sospensione sono stati appositamente inseriti in modo da rispettare la condizione di movimento planare.
- Influenza del braccetto dello sterzo; il software non dà la possibilità di non considerare questo elemento; quindi, è stato modellato in modo da ridurre al minimo i suoi effetti sul sistema.

Definite le coordinate dei punti di attacco dei braccetti, dell'ammortizzatore e della molla e le dimensioni dello pneumatico, il software permette di analizzare le forze in diverse configurazioni.

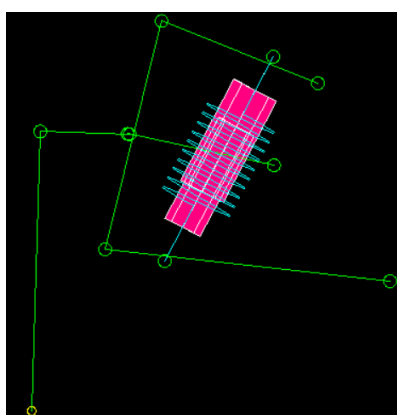


Figura 2.4 - bump

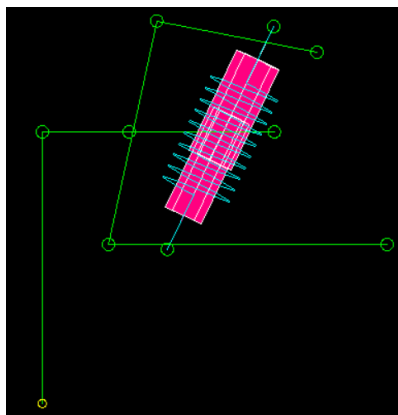


Figura 2.5 - static condition

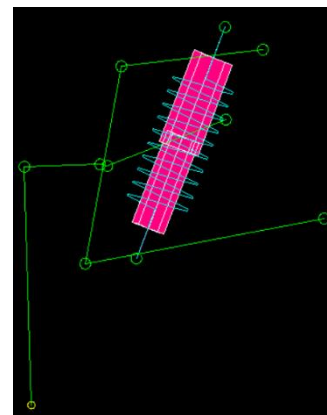


Figura 2.6 - rebound

Il software chiede di immettere un range di wheel travel, wt , ovvero lo spostamento che la ruota può effettuare rispetto alla condizione statica, e ogni quanto si desidera effettuare l'analisi in termini di spostamento, quindi la differenza tra i valori di wheel travel di due configurazioni successive. Si è deciso di effettuare la simulazione in un range dove $wt = [-65 \text{ mm}, +40 \text{ mm}]$ a step di 5 mm .

Sono stati presi questi valori in quanto la configurazione $wt = -65 \text{ mm}$ corrisponde al punto dove la forza agente sul mozzo della ruota F , ha un segno opposto, rappresentando quindi una condizione in cui la forza dovrebbe tirare verso in basso il mozzo. Detto ciò, il punto estremo di massimo rebound è posizionato a $wt = -63,8 \text{ mm}$. Per quanto riguarda la configurazione di massimo bump si è scelto di prendere il valore di $wt = +40 \text{ mm}$ perché corrisponde al punto in cui la sospensione deforma il tampone di fine corsa di 10 mm ; questa valutazione è stata fatta in fase di impostazione tramite disegno tecnico e modello CAD piano precedentemente descritto.

Le configurazioni analizzate nel dettaglio, per avere un riscontro con il modello grafico, sono a:

- $wt = -40 \text{ mm} \Rightarrow F = 1008.4 \text{ N}$
- $wt = +40 \text{ mm} \Rightarrow F = 4595.8 \text{ N}$
- $wt = 0 \text{ mm} \Rightarrow F = 2781 \text{ N}$

Per poter manipolare i dati ottenuti da Lotus Shark, i valori delle forze su ruota e gruppo molla/smorzatore in funzione del wheel travel, wt , sono stati importati sul software MATLAB creando degli array.

I due grafici di maggiore interesse per lo studio della sospensione sono, quello riguardante la relazione tra forza F e wt , e l'altro sul valore di rigidità a terra in funzione del wt . [Fig.2.7] e [Fig.2.8]

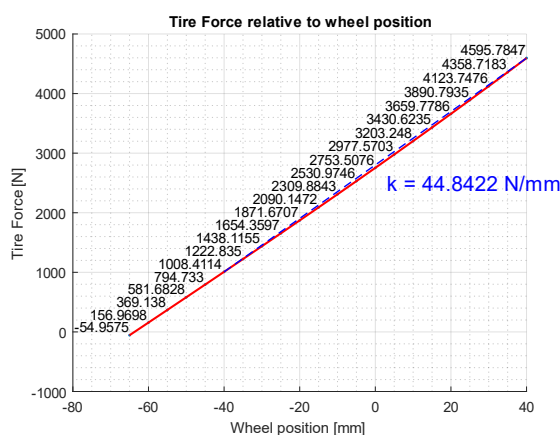


Figura 2.7 – Forza ruota (F) su spostamento ruota

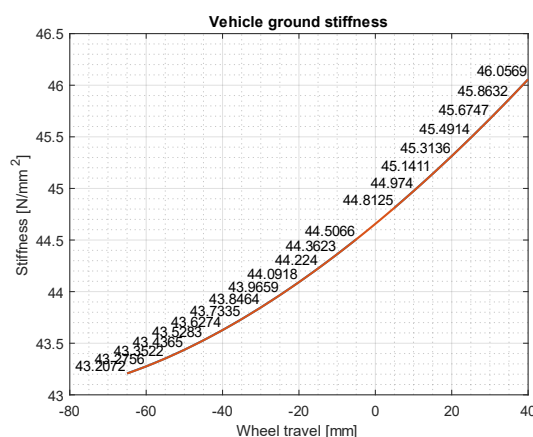


Figura 2.8 – Rigidità a terra in funzione dello spostamento ruota

È importante specificare, come si può notare dal grafico in [Fig. 2.7], che $F(wt)$ non è lineare, ma, anche se di poco, variabile, per questo è stata calcolata la rigidità secante dal valore di $wt = -40 \text{ mm}$ a $wt = +40 \text{ mm}$. Tale rigidità $k_{sec} = \frac{4595.8 - 1008.4}{40 + 40} = 44,84 \text{ N/mm}$. Nel grafico [Fig.2.8], si può

notare come questa rigidità vari in funzione della wt ; infatti, si è tracciata una curva interpolante per tutto il tratto studiato dove per ogni punto si è rapportata la differenza tra la forza agente sulla ruota nella condizione studiata rispetto a quella in condizione statica rispetto alla posizione. Il lavoro effettuato per il calcolo di K_{sec} è stato svolto per l'analisi vibrazionale che sarà presentata più avanti attraverso un modello semplificato. Oltre ai grafici appena descritti, riportiamo anche il grafico che raffigura la relazione tra la forza sull'ammortizzatore e la forza a terra. [Fig.2.9]

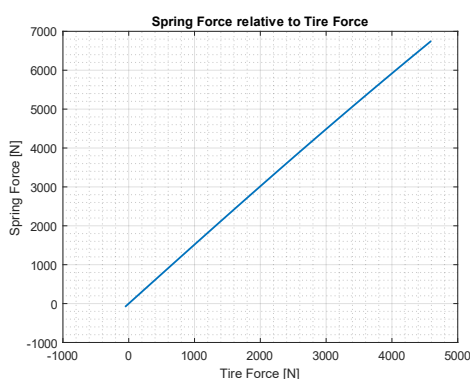


Figura 2.9 – Forza sull'ammortizzatore (F_s) su forza a terra (F)

CONCLUSIONI FINALI

Per lo studio della statica sono stati utilizzati i due metodi sopra descritti, in modo tale da poter discutere e confrontare i vari risultati ottenuti.

Come è possibile immaginare, i dati finali sono coerenti tra i due metodi, ma sono presenti delle lievi variazioni, in linea con le ipotesi e considerazioni effettuate.

Per far ciò sono state prese in analisi le tre configurazioni $wt = -40 \text{ mm}$ ($\theta_2 = 76.91^\circ$); $wt = +40 \text{ mm}$ ($\theta_2 = 63^\circ$); $wt = 0 \text{ mm}$ ($\theta_2 = 70^\circ$), che corrispondono rispettivamente alle condizioni di rebound, total bump, e condizione statica.

Si riportano nella seguente tabella i dati del metodo grafico e della simulazione tramite il software [Tab.2.2].

Tabella 2.2 – Comparazione risultati metodo grafico e Lotus Shark

θ_2 [°] (wt [mm])	F [N] Cad	F [N] Lotus	Fs [N] Cad	Fs [N] Lotus
63° (total bump, $wt = 40 \text{ mm}$)	4768.2	4595.8	7006.4	6751.6
70° (static, $wt = 0 \text{ mm}$)	2781	2753.5	4151.3	4127.2
76.91° ($wt = -40 \text{ mm}$)	934.7	1008.4	1431.8	1529.9

Come si può notare i valori non sono esattamente gli stessi, questo è dovuto al fatto che si sono utilizzati metodi differenti. Ad esempio, il software, come scritto in precedenza, tiene in considerazione il braccetto dello sterzo, che, anche se in minima parte visto che la massima forza che si scarica su di esso è di $6,8 \text{ N}$, interferisce con il sistema in generale. Inoltre, valuta anche il fatto che l'asse della ruota non rimane sempre parallelo rispetto al suolo, in quanto il moto della ruota descrive una curva. Quindi come si può vedere dall'immagine la rigidità che modella il collegamento mozzo-terreno non rimane costantemente verticale (F è sempre perpendicolare al suolo), ma si inclina di un angolo in base allo spostamento, questo fa sì che si instauri una componente orizzontale che si andrà a scaricare sui vari componenti della sospensione, andando di fatto a diminuire il modulo di F_s e di F . Il modello grafico non tiene in considerazione questi fattori, di conseguenza notiamo le variazioni sopra citate, che comunque sono ingegneristicamente contenute, visto che la maggiore di esse è in percentuale pari a $6,6 \%$.

ANALISI DINAMICA

INTRODUZIONE

Questo capitolo si occuperà dello studio del moto dei sistemi meccanici. In generale durante lo studio delle macchine si incontra la necessità di sviluppare il modello dinamico di un sistema meccanico, per tale modello si possono incorrere in due strade; il problema dinamico inverso (detto “quasi statico”) che dato il movimento di tale sistema si propone di ricavare le coppie o forze necessarie al suo mantenimento o il problema dinamico diretto, supposte note tutte le forze e coppie attive agenti sul sistema se ne ricerca il moto. Per lo studio si possono utilizzare vari metodi tra cui:

- Equazioni di Newton-Eulero (equazioni cardinali della dinamica)
- Principio di d'Alembert
- Principio dei lavori dei lavori virtuali
- Bilancio delle potenze

Nello studio del nostro sistema è conveniente utilizzare il bilancio delle potenze in quanto permette di analizzare il flusso di potenza dal motore all'utilizzatore (le ruote) dando un'analisi più pratica delle grandezze prese in esame. Durante il moto degli organi meccanici una parte della potenza viene persa sotto forma di calore per attrito tra le varie parti in collegamento, risulta solitamente difficile andare a definire tutte le forze di attrito agenti, si opta dunque per l'utilizzo di un rendimento che permette di stimare queste perdite.

CONSIDERAZIONI EFFETTUATE

Nello sviluppo analitico ci siamo ricavati i valori di coppia massima e rapporto di trasmissione dal manuale [*F40_Technical_Manual*], mentre abbiamo utilizzato il libro di testo per trovarci il coefficiente di resistenza aerodinamica ed i vari fattori di attrito. [*Tab 3.1*]:

Tabella 3.1 – Valori caratteristici utilizzati

Coppia massima	C_{max}	575 Nm
Rendimento trasmissione	η_d	0.9
Rapporto di trasmissione	$\tau_{1st\ gear}$	$\frac{1}{10.707}$
Rapporto di trasmissione	$\tau_{5th\ gear}$	$\frac{1}{2.965}$
Inerzia motore	J_m	0.2 kg m ²
Raggio circonferenza	R	0.3207 m
Inerzia ruota	J_r	1.13 kg m ²
Coefficiente di resistenza aereodinamica	C_x	0.34
Fattore di attrito statico	f_s	1.1
Fattore di attrito dinamico	f_d	0.9
Fattore di attrito volvente	f_v	0.015
Superficie frontale	A	1.86 m ²
Massa veicolo totale	m	1550 kg
Densità aria	ρ	1.225 kg/m ³

Nel calcolo dell'inerzia della ruota, dal manuale [F40_Technical_Manual] vengono riportate le circonferenze degli pneumatici da cui ci calcoliamo il raggio (3.1):

$$r = \frac{\text{circonferenza}}{2\pi} \quad (3.1)$$

Una volta calcolato è possibile calcolarsi l'inerzia polare della ruota (3.2):

$$J_r = \frac{1}{2} \times m_{ruote} \times r^2 \quad (3.2)$$

Per la stima della superficie frontale del veicolo ci siamo riportati ai valori presi da [automobile-catalog].

Per la stima del peso vettura abbiamo considerato i seguenti parametri riguardanti i liquidi presenti nella vettura [Fonte: F40_Technical_Manual].

Tabella 3.2 liquidi vettura

Olio motore	9 lt
Olio differenziale/cambio	4.5 lt
Liquido freni	1.3 lt
Circuito raffreddamento	17 lt
Liquido lavavetri	3 lt
Serbatoio carburante	120 lt

Considerando questi valori e tenendo conto che il peso medio percentile di una persona (il pilota) è di circa 75 kg, si ipotizza un peso di 200 kg da sommare al peso a vuoto del veicolo di 1350 kg.

SVILUPPO TEORICO

CALCOLO ACCELERAZIONE MASSIMA

Il calcolo dell'accelerazione massima lo abbiamo sviluppato tramite il bilancio delle potenze.

Il flusso di potenza nelle trasmissioni meccaniche può essere di moto diretto o inverso, ovvero se fluisce dal motore all'utilizzatore o viceversa.

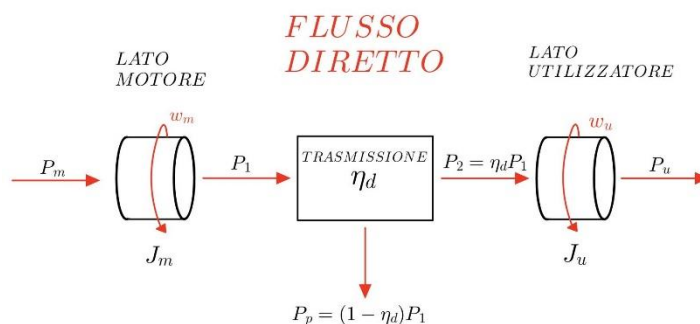


Figure 3.1 – Flusso di potenza attraverso la trasmissione

Nel nostro caso andiamo a calcolare la massima accelerazione partendo da fermi sul piano; perciò, il flusso di potenza dal motore all'utilizzatore sarà un moto diretto. Scriviamo la potenza erogata dal motore come la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica del motore e delle due ruote (3.3).

$$\eta M_m \omega_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 \right) \quad (3.3)$$

Le velocità angolari delle ruote e del motore sono in relazione tra di loro da un rapporto di trasmissione (3.4):

$$\tau = \frac{\omega_r}{\omega_m} \quad (3.4)$$

Tramite la relazione tra la velocità tangenziale e la velocità angolare, possiamo semplificare ulteriormente la nostra equazione, per esprimere la coppia motore (3.5):

$$v = r \omega_r = r \tau \omega_m \quad (3.5)$$

Andando a sostituire in (3.3) e dividendo per ω_r derivando l'energia cinetica rispetto al tempo otteniamo (3.6):

$$\eta \frac{M_m \omega_r}{\tau \omega_r} = \frac{J_m \omega_r \dot{\omega}_m}{\tau \omega_r} + \frac{m r \omega_r r \dot{\omega}_r}{\omega_r} + \frac{2 J_r \omega_r \dot{\omega}_r}{\omega_r} \quad (3.6)$$

Successivamente si va ad esplicitare la Coppia motore (M_m) in funzione dell'accelerazione lineare (3.7):

$$M_m = \frac{J_m + m r^2 \tau^2 + 2 J_r \tau^2}{\eta} \frac{\dot{v}}{r \tau} \quad (3.7)$$

Una volta trovata l'espressione per la coppia del motore, è possibile trovare l'accelerazione lineare del veicolo (3.8):

$$\dot{v} = \frac{M_m \cdot \eta \cdot r \cdot \tau}{J_m + m r^2 \tau^2 + 2 J_r \tau^2} = 9.63 \frac{m}{s^2} \approx 0.98 g \quad (3.8)$$

CALCOLO VELOCITA' MASSIMA

Questo paragrafo si occupa del calcolo della velocità massima della vettura mentre sta percorrendo una strada rettilinea in piano. Durante la marcia in piano essendo il moto diretto il bilancio delle potenze a regime viene:

$$P_m - P_r - P_p = 0 \quad (3.9)$$

Imponendo un rendimento nella trasmissione pari a $\eta_d = 0.9$ si può riscrivere la (3.9) come:

$$P_r = \eta_d P_m \quad (3.10)$$

La potenza P_r rappresenta le perdite di dissipazione per attrito a valle della trasmissione (suolo e resistenza aereaodinamica) e P_m rappresenta la potenza del motore, in particolare:

$$P_r = (f_v mg + \frac{1}{2} c_x \rho A v^2) v \quad (3.11)$$

$$P_m = M_m \omega_m = M_m \frac{v}{r\tau} \quad (3.12)$$

Successivamente si ipotizza che la velocità massima si raggiunga a potenza massima ovvero quando il motore sta a 7000 rpm, perciò dal grafico [Fig.3.2] ricaviamo la coppia pari $M_m = 475 Nm$.

Andando a sostituire i valori (3.11) e (3.12) nella (3.10) si ricava la velocità massima della vettura (3.13).

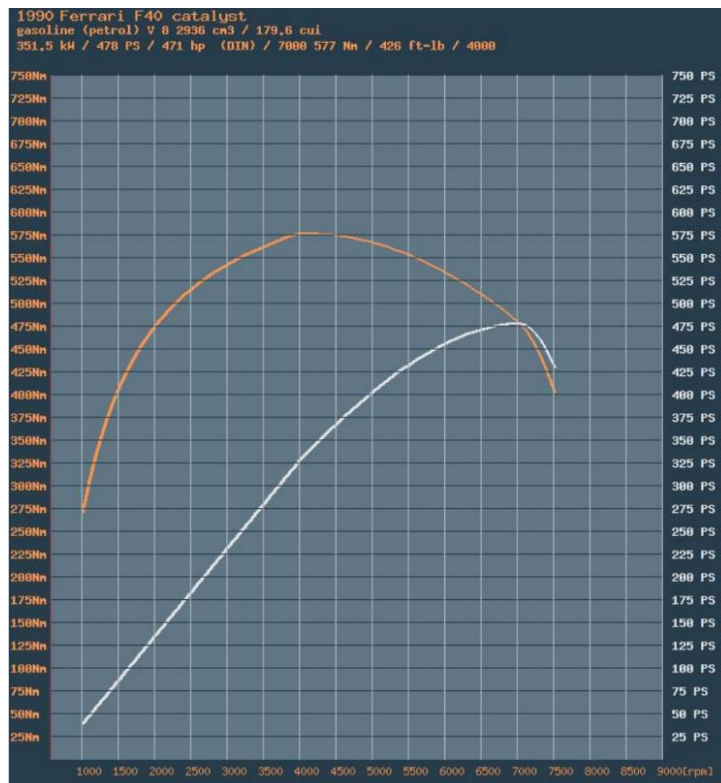


Figura 3.2 - Curve coppia e potenza motore Ferrari F40

$$v = \sqrt{\frac{2}{c_x \cdot \rho \cdot A} \left(\frac{\eta_d \cdot M_m}{r\tau} - f_v mg \right)} \approx 98 \frac{m}{s} \approx 353 \frac{km}{h} \quad (3.13)$$

VALIDAZIONE

ACCELERAZIONE

Un altro metodo con il quale è possibile calcolare l'accelerazione massima, precedentemente calcolata con i flussi di potenza (3.8), è fare un equilibrio delle forze agenti. In particolare, conviene effettuare l'equilibrio alla traslazione longitudinale della vettura per ricercare la massima forza a terra che possono trasferire le ruote, tenendo conto del trasferimento di carico della vettura e di attrito statico tra gomma e suolo.

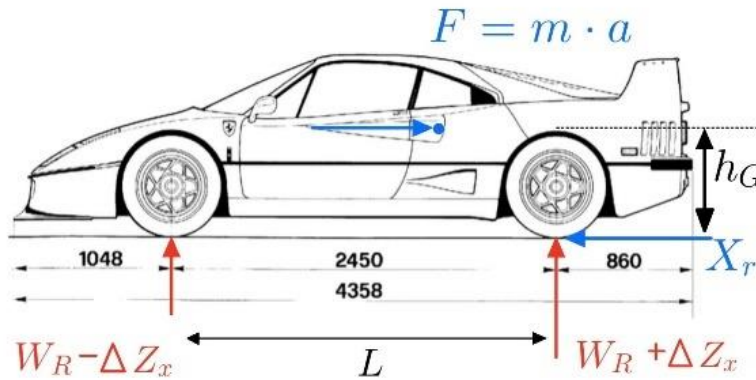


Figura 3.3 - Equilibrio forze longitudinali

Impostiamo l'equazione di equilibrio rispetto all'asse x (3.14):

$$X_r - F \frac{h_G}{L} f_s = W_r f_s \quad (3.14)$$

Andando ad esplicitare X_r (3.15)

$$X_r = Z_r f_s = (W_r + \Delta Z_x) f_s = \left(W_r + F \frac{h_G}{L} \right) f_s \quad (3.15)$$

Da cui:

$$X_r = \frac{W_r f_s}{1 - \frac{h_g}{L} f_s} \quad (3.16)$$

Dalla formula (3.16) ci siamo ricavati la forza massima che lo pneumatico riesce ad esercitare sul terreno, utilizzando ora la seconda legge di Newton ci calcoliamo l'accelerazione massima partendo da fermo senza slittamento delle ruote (3.17).

$$a = \frac{X_r}{M_{veicolo}} = 8.37 \frac{m}{s} \Rightarrow 0.853g \quad (3.17)$$

Osserviamo come il risultato ottenuto nella (3.17) sia minore rispetto a quello della (3.8). Questo poiché quest'ultimo calcolo è la massima accelerazione che l'attrito tra suolo e ruota è in grado di garantire. Ulteriori considerazioni tra i due risultati verranno fatte nelle conclusioni finali.

Un'ulteriore validazione dell'accelerazione viene eseguita utilizzando delle tabelle empiriche che vanno ad analizzare il comportamento della vettura in uno sparo da 0 a 240 km/h. In tali tabelle:

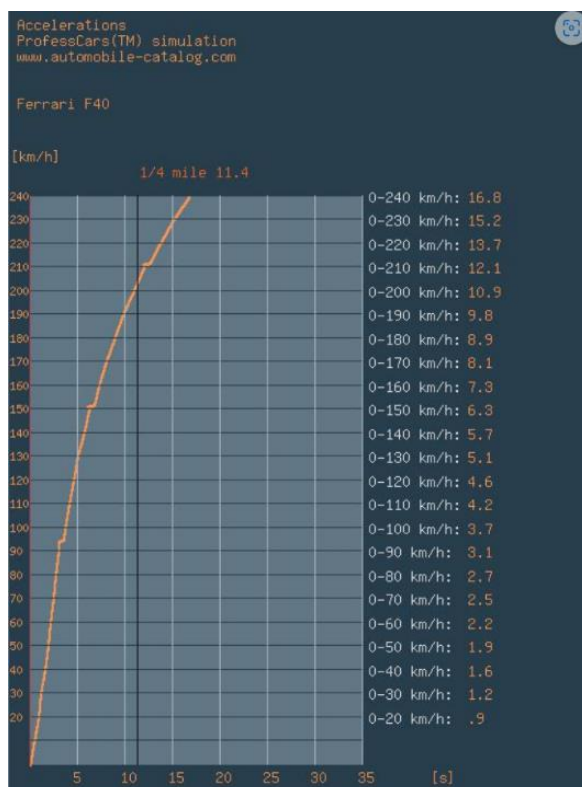


Figura 3.4 – Accelerazione empirica 0-240 km/h

[Fig.3.3] si va a prendere i valori più vicini all'istante della partenza così da ricavarsi quasi un valore infinitesimo di accelerazione.

Per tale motivo prendiamo in considerazione l'intervallo che va da 0-40 km/h e ci calcoliamo l'accelerazione

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{11.11}{1.5} = 7.4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow 0.75 g \quad (3.18)$$

Confrontando quest'ultimo risultato con quelli precedentemente ottenuti si nota come quest'ultimo sia ulteriormente minore. Questo è dovuto al fatto che i calcoli teorici svolti non tengono conto dei transitori che la vettura subisce in accelerazione che ne influenzano il risultato.

È corretto supporre perciò che, tenendo conto delle considerazioni, fatte i risultati ottenuti siano una validazione del nostro sviluppo teorico tramite il bilancio delle potenze e che ne mostrino i reali limiti di tale metodo in un calcolo reale dell'accelerazione.

VELOCITA' MASSIMA

Nello studio dell'analisi dinamica per l'F40, a causa delle approssimazioni fatte per trovare il valore della velocità massima della vettura, abbiamo notato che, come per il valore dell'accelerazione massima trovato nel paragrafo precedente, i risultati trovati si discostano da quelli presi come riferimento dal manuale tecnico; nel caso della velocità in particolare, l'errore stimato è di circa il 12%. Questo errore però si va a ridurre significativamente dai risultati ottenuti mediante le tabelle empiriche [Fig 3.5] trovate sulle prove di velocità massima della Ferrari F40. Inoltre, si può notare come i dati riportati nel manuale tecnico dell'F40 [Fig 3.6] siano di poco sottostimati rispetto ai grafici di coppia-numero di giri e accelerazione massima. Riportandoci al nostro caso (3.13) e facendo riferimento alle tabelle empiriche, l'errore che si va a definire tra lo scostamento delle due velocità è minore del 5%.

PRESTAZIONI		Speed range (max speed on gears, top gear value theor.):	(km/h/mpg)
da 0 a 100 Km/h	4.8 sec.	I:	94 / 58
1 Km da fermo	21.9 sec.	II:	151 / 94
velocità massima		III:	211 / 131
raggiungibile	313 Km/h	IV:	269 / 167
		V:	338 / 210

Figura 3.5 – Velocità massima [Fonte: F40_Technical_Manual]

Figura 3.6 - Velocità massima [Fonte: automobile-catalog]

RISULTATI

ACCELERAZIONE

In questa sezione si svolgeranno i calcoli visti nel paragrafo dello sviluppo teorico della accelerazione, considereremo una partenza in prima marcia a 4000 rpm con coppia massima.

Tabella 3.3 - Valori utilizzati nel calcolo dell'accelerazione massima

M_m	575 Nm
η	0.9
r	0.3207 m
τ	$\frac{1}{10.707}$
J_m	0.2 kg m ²
m	1550 kg
J_r	1.13 kg m ²

Riportata l'equazione (3.8) ed introducendo i parametri di [Tab 3.3] otteniamo un'accelerazione pari a $9.63 \frac{m}{s^2}$ equivalentemente a 0.98g.

$$\dot{v} = \frac{M_m \cdot \eta \cdot r \cdot \tau}{J_m + mr^2\tau^2 + 2J_r\tau^2} = 9.63 \frac{m}{s^2} \approx 0.98 g$$

VELOCITA'

Precedentemente a quanto visto nel procedimento teorico, si è riportato la formula (3.13), considerando la coppia massima di 475 Nm a 7000 rpm [Fig.3.2].

Tabella 3.4 – Valori utilizzati nel calcolo della velocità massima

c_x	0.34
ρ	1.225 kg/m ³
A	1.86 m ²
η	0.9
M_m	475 Nm
f_v	0.015
m	1550 kg
g	9.81 m/s ²
r	0.3207 m

Inseriti nella formula i valori di [Tab 3.4] e sviluppati i calcoli otteniamo una velocità massima pari a 353 km/h

$$v = \sqrt{\frac{2}{c_x \cdot \rho \cdot A} \left(\frac{\eta \cdot M_m}{r\tau} - f_v mg \right)} \approx 98 \frac{m}{s} \approx 353 \frac{km}{h}$$

CONCLUSIONI

Dalla soluzione della formula (3.18) si può evidenziare un valore dell'accelerazione minore rispetto a quella calcolata con il bilancio delle potenze (3.8), questo perché ipotizza la massima accelerazione considerando la massima forza trasmissibile a terra dovuta all'attrito statico e al trasferimento di carico sull'assale posteriore. Questo evidenzia che effettuando una partenza da fermo a 4500 RPM in modo tale da aver disponibile la coppia massima, 575 Nm, che il motore può erogare, le ruote della vettura non riescono a scaricare tutta la forza a terra, e quindi slittano. [Fig.3.7]

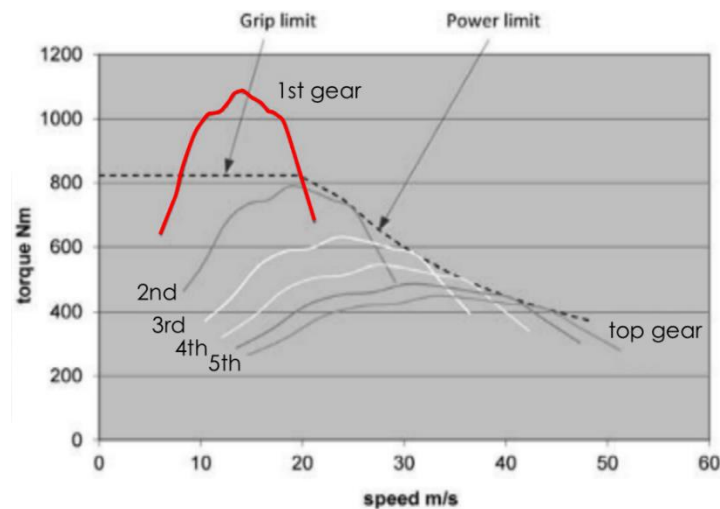


Figura 3.7 - Curva Grip limit

In fine, confrontando i valori ottenuti dalla (3.14) possiamo concludere che il valore teorico di accelerazione tramite il bilancio delle potenze rappresenta una sovrastima della reale accelerazione della macchina a causa delle semplificazioni effettuate nello studio del problema che trascurano lo slittamento delle ruote e i transitori che abbiamo nell'accelerazione del veicolo, poiché non è possibile effettuare una partenza a coppia massima, ma ci vorrà un certo tempo prima di arrivare alle condizioni di massima accelerazione.

Per quanto riguarda il calcolo della velocità massima è possibile concludere che anch'esso sia una sovrastima della reale velocità massima e questo poiché essa è soggetta ad una grande variazione in funzione delle condizioni al contorno (densità dell'aria, attrito dell'asfalto, ecc..). Queste considerazioni dimostrano il motivo per il quale numerosi test su strada della vettura forniscano numerosi valori della velocità massima.

ANALISI VIBRAZIONI

INTRODUZIONE

In questo capitolo si studiano le oscillazioni verticali del veicolo, si è scelto di schematizzarlo mediante il modello riportato nella [Fig. 4.1]. Nello specifico si andranno a verificare le oscillazioni riducendo il problema ad un sistema meccanico ad un solo grado di libertà, il moto verticale della massa. Si modella una singola sospensione mediante molla e smorzatore, applicando la frazione di massa del veicolo che teoricamente insiste su di essa.

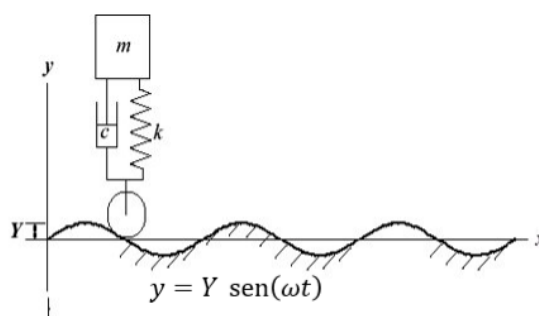


Figura 4.1 - Schematizzazione sistema molla/ammortizzatore

Lo smorzatore è costituito da un cilindro pieno di olio in cui scorre un pistone dotato di una serie di piccoli fori. Durante il movimento del pistone nel cilindro l'olio è forzato a passare attraverso i fori e a causa della viscosità dell'olio si genera una forza resistente, ciò significa che per estendere lo smorzatore è necessario esercitare una forza dipendente dalla velocità di estensione. Lo scopo principale di questa analisi è valutare l'andamento del sistema sottoposto ad un movimento sinusoidale generato dalla base, in un range di frequenze. Si è calcolata la frequenza di oscillazione naturale ω_n del sistema, la frequenza di oscillazione naturale smorzata ω_d , e la trasmissibilità τ .

CONSIDERAZIONI EFFETTUATE

Per il seguente studio è stato deciso di analizzare il comportamento vibratorio della singola sospensione; quindi, nel modello rappresentato in [Fig. 4.1] sono stati utilizzati i dati riportati nella tabella sottostante.

Tabella 4.1 - Valori vibrazionali della vettura

Massa sospesa	m	291.75 Kg
Rigidezza a terra	K_{eq}	$44.84 \frac{N}{mm}$
Coefficiente di smorzamento	c	$2.53 \frac{Ns}{mm}$
Fattore di smorzamento adimensionale	ζ	0.35
Ampiezza oscillazione molla	Y_0	40 mm
Range di pulsazione considerata	ω	$[0.1\omega_n; 20\omega_n] \frac{rad}{s}$

Per quanto riguarda la massa è stata considerata quella sospesa (90% di quella totale) gravante sulla singola ruota considerando sempre la ripartizione del peso descritta precedentemente nella parte di statica, contenente anche il calcolo e la descrizione della rigidità a terra.

La forza prodotta dallo smorzatore di oscillazioni F_d , che ha il compito di dissipare energia, è stata modellata attraverso la formula (4.0) in quanto a livello teorico si può affermare che la forza prodotta dall'attrito dipende dalla velocità.

$$F_d \cong c\dot{x} \quad (4.0)$$

Dove c rappresenta il coefficiente di smorzamento, e $\dot{x}$ la velocità. È importante specificare che in questo caso F_d non dipende soltanto da una velocità, ma da due, perché $x(t) = y(t) + z(t)$.

SVILUPPO TEORICO

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza è possibile studiare il problema di [Fig. 4.1] passando al modello equivalente di [Fig. 4.2], sistema ad un grado di libertà con eccitazione sismica: si suppone che il sistema poggi su di un base oscillante che abbia una massa notevole e che il suo moto non sia influenzato dal moto della massa m . Il moto del basamento è individuato dalla coordinata verticale $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ mentre la posizione assoluta della massa è indicata con $x(t)$. Le oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio sono governate dall'equazione (4.1).

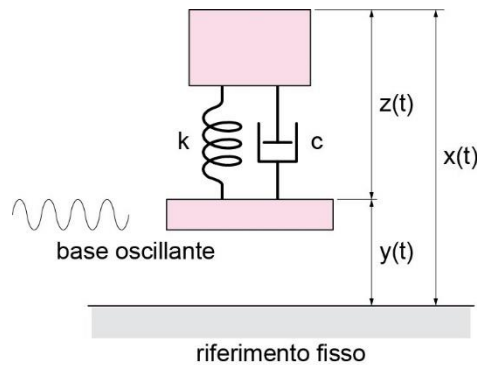


Figura 4.2 - Sistema ad un grado di libertà con eccitazione sismica

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = 0 \quad (4.1)$$

Lo studio consiste nel determinare la posizione della massa sospesa rispetto al riferimento, allora pongo $z(t) = x(t) - y(t)$ e sostituendo nella (4.1):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \quad (4.2)$$

Si considera la formulazione complessa $y = Y_0 e^{j\omega t}$ e la (4.2) si ha che:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = k Y_0 e^{j\omega t} + c Y_0 j\omega e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

Raccogliendo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Y_0(k + jc\omega)e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

La soluzione dell'equazione (4.4) è composta dalla somma di due termini; la soluzione dell'omogenea associata x_{OA} e la soluzione dell'equazione particolare x_P :

$$x(t) = x_{OA} + x_P \quad (4.5)$$

Si vanno ora a definire i seguenti parametri del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = 0.39 \frac{rad}{s} \quad (4.6)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0.37 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4.7)$$

Per determinare l'espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata occorre in primo luogo verificare se il sistema risulta sotto smorzato, sovra smorzato o in condizioni di smorzamento critico. Poiché risulta $\zeta < 1$ il sistema è sottoposto a smorzamento subcritico. Essendo subcritico il discriminante risulterà negativo dando due soluzioni complesse di cui la soluzione dell'omogenea associata viene riportata (4.8):

$$x_{OA}(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) \quad (4.8)$$

L'integrale particolare dell'equazione completa per il caso in esame (moto forzato dovuto allo spostamento del vincolo) tale soluzione è del tipo:

$$x_p = X_0 \sin(\omega t - \psi) \quad (4.9)$$

Ora si prende in considerazione lo spostamento sinusoidale x_p e riscrivendolo tramite l'ausilio della forma esponenziale dei numeri complessi otteniamo la seguente forma:

$$x_p = X_0 e^{j\omega t} \quad (4.10)$$

Si procede al calcolo della velocità e accelerazione tramite derivata prima e seconda rispetto al tempo della (4.10):

$$\dot{x}_p = X_0 j\omega e^{j\omega t} \quad (4.11)$$

$$\ddot{x}_p = -X_0 \omega^2 e^{j\omega t} \quad (4.12)$$

Tutto ciò è stato effettuato in modo tale da esplicitare il termine X_0 , e per farlo si sostituiscono i termini (4.10), (4.11), (4.12) nell'equazione (4.4) ottenendo:

$$-mX_0\omega^2 e^{j\omega t} + cX_0 j\omega e^{j\omega t} + kX_0 e^{j\omega t} = Y_0(k + jc\omega)e^{j\omega t} \quad (4.13)$$

Si ottiene:

$$X_0(\omega) = \frac{k + (jc\omega)}{(-m\omega^2 + k) + (jc\omega)} Y_0 \quad (4.14)$$

Per ricavarsi la soluzione particolare si sostituisce la (4.14) nella (4.9), e si sostituisce la forma algebrica con quella esponenziale:

$$x_p = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} e^{j\psi_1}}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} e^{j\psi_2}} y_0 e^{j\omega t} \quad (4.15)$$

Si raccolgono gli esponenti:

$$x_p = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} Y_0 e^{j\omega t + (\psi_1 - \psi_2)} \quad (4.16)$$

Introducendo il fattore di smorzamento (4.17) ed essendo la parte reale dell'equazione (4.16) quella che modella fornisce l'andamento della soluzione particolare; si può scrivere:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\omega_n m} \quad (4.17)$$

$$x_p = \frac{\sqrt{\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} Y_0 \sin(\omega t - (\psi_2 - \psi_1)) \quad (4.18)$$

La soluzione finale si ottiene sostituendo la (4.8) e la (4.18) nella (4.5):

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) + \frac{\sqrt{\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} Y_0 \sin(\omega t - \psi) \quad (4.19)$$

L'equazione appena mostrata fornisce il valore della posizione del centro di massa CM, rispetto al sistema di riferimento fisso. È importante distinguere i due termini che compongono la soluzione; infatti, il primo rappresenta la soluzione dell'omogenea e come si può notare dall'esponente, per valori di t grandi fornirà un risultato trascurabile. Ciò significa che modella la fase transitoria del sistema. Il secondo termine invece è la soluzione particolare, ed entra in gioco dai primi istanti di tempo fino alla fine; quindi, andrà ad influire la fase iniziale e modellerà l'andamento vibratorio del sistema una volta finito il transitorio.

Quest'ultimo termine può essere matematicamente semplificato introducendo la **trasmissibilità** τ , che è definita come:

$$\tau = \frac{\sqrt{\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (4.20)$$

La trasmissibilità è un fattore adimensionale che indica quanto la sospensione sia in grado di assorbire gli urti; quindi, generalmente può essere vista come il rapporto tra forza trasmessa al basamento e forza applicata alla massa, oppure come in questo caso il rapporto tra l'ampiezza dell'oscillazione X_0 della massa sospesa e l'ampiezza dell'eccitazione sismica Y_0 .

$$\tau = \frac{X_0}{Y_0} \quad (4.21)$$

In sostanza la trasmissibilità definisce la qualità della sospensione; infatti, se si pensa al sistema molla smorzatore come ad una sospensione atta a ridurre le vibrazioni trasmesse al basamento, è ovvio che la migliore sospensione è quella che minimizza τ perché l'ampiezza della vibrazione $X_0 = \tau Y_0$

IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE

Per la parte di validazione è stato usato il software Adams View; si è quindi creato un modello come in [Fig. 4.2].

Il modello chiede in input:

- Massa del corpo sospeso → Massa gravante sulla singola sospensione anteriore = 291.75 Kg
- Rigidezza della Molla → Rigidezza secante = $44.84 \frac{N}{mm}$ (vedi Capitolo Statica)
- Coefficiente di smorzamento → Calcolato imponendo $\zeta = 0.35$
- Massa del basamento >> Massa del corpo sospeso → Evita che il moto del basamento non venga influenzato dalle vibrazioni prodotte
- Moto del basamento → si è scelto di analizzare il sistema con l'ausilio di due differenti tipologie di movimento:
 - $y = 40 \sin(2\omega_n t)$
 - $y = \text{sweep}(t, 40, 0, 0.1\omega_n, 15, 20\omega_n, 0.01)$
 È stato scelto di utilizzare come ampiezza massima di oscillazione in entrambe le funzioni il valore di fine corsa della sospensione in bump, ovvero 40mm (vedi Capitolo Statica).
- Gravità disattivata → Si analizza il comportamento in statica
- Tempo di simulazione = 15s

Riportiamo i grafici ricavati con il software; si specifica che nonostante il tempo di simulazione di 15 secondi, sono stati interrotti a 6 secondi in quando dopo il seguente intervallo temporale il modello si stabilizza.

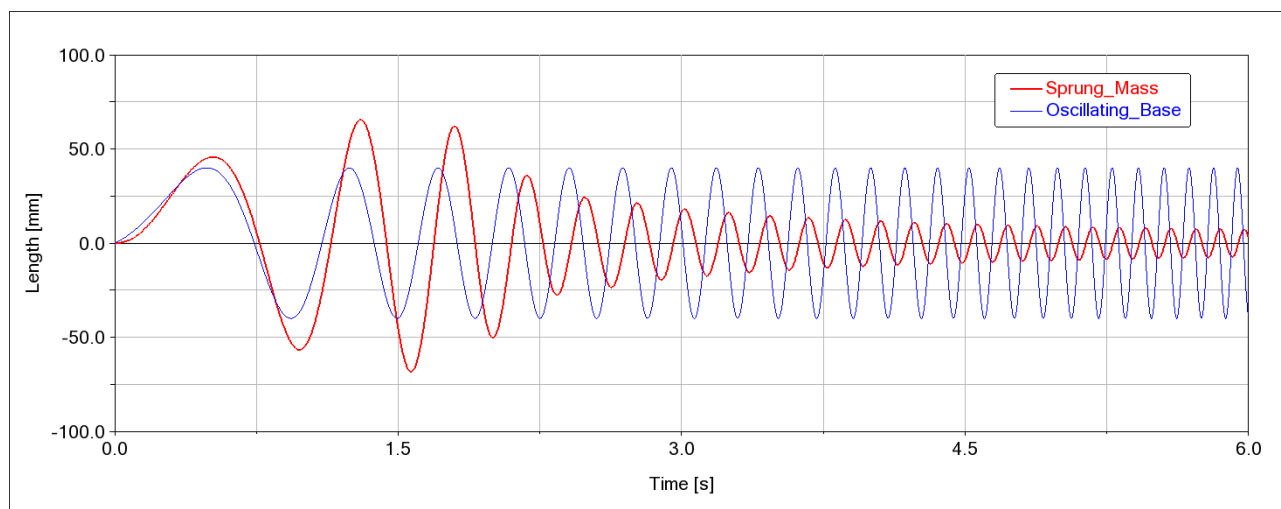


Figura 4.3 - Sweep Function Adams View

Come si può notare dalla [Fig. 4.3] a basse frequenze l'ampiezza di oscillazione della massa sospesa è maggiore rispetto a quella della base, mentre già pochi istanti dopo ($t < 1.5$ s) si abbassa ad un valore considerevolmente inferiore. Si vedrà nella parte di Conclusioni il perché di questo andamento. Inoltre, come mostrato in [Fig. 4.4] utilizzando la funzione FFT (Fast Fourier Transform) è possibile ricavarsi dal grafico della posizione del CM la frequenza di risonanza, confermando il valore ottenuto 1.85 Hz come in [Tab. 4.1].

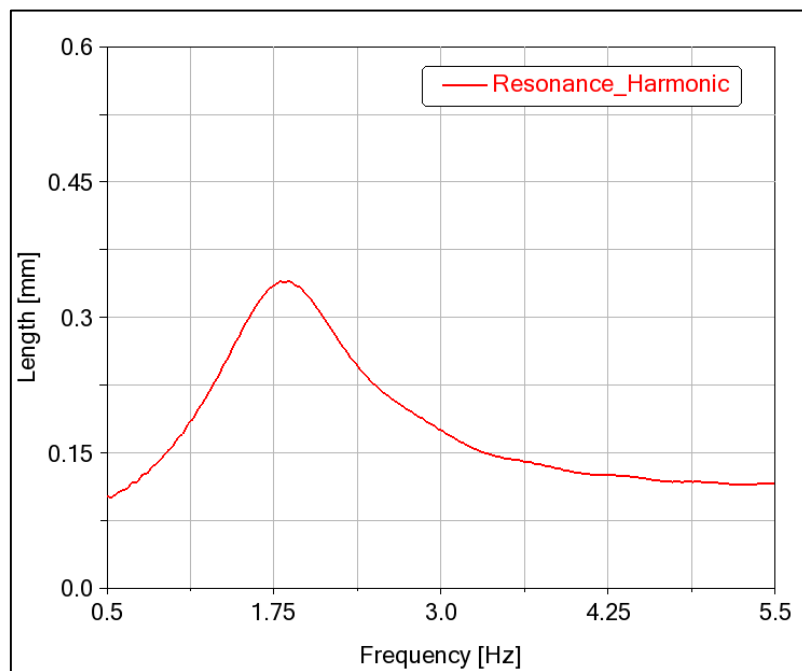


Figure 4.4 - Fast Fourier Transform

Infine, è stata effettuata una seconda simulazione imponendo un movimento sinusoidale con $\omega = \text{cost}$ [Fig 4.5] per validare la posizione fornita dalla formula (4.19).

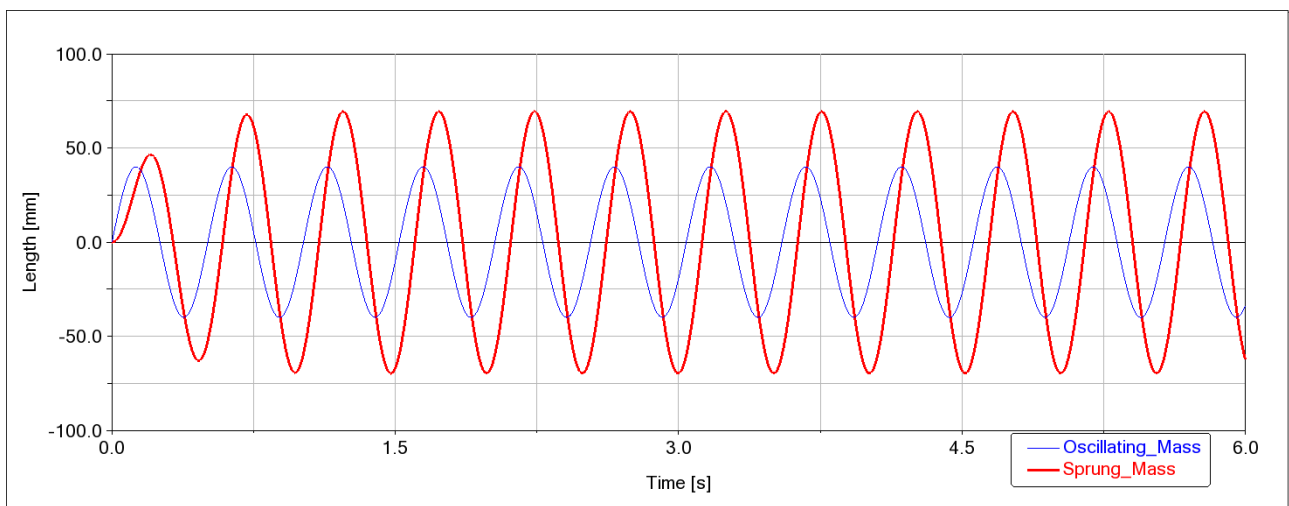


Figure 4.5 - Sin function Adams View

RISULTATI

Si riportano i seguenti calcoli per mostrare i valori dei dati richiesti. Sono stati utilizzati i valori in [Tab. 4.1].

Pulsazione naturale ω_n ricavata con l'equazione (4.6):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{44840}{291.75}} = 12.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_n = 1.97 \text{ Hz} \quad (4.21)$$

Calcolo del coefficiente di smorzamento c mediante la formula (4.18):

$$c = \zeta 2\sqrt{k m} = 0.35 * 2 * \sqrt{44840 * 291.75} = 2.53 \frac{\text{Ns}}{\text{mm}} \quad (4.22)$$

Per la pulsazione naturale smorzata ω_d si utilizza l'equazione (4.7):

$$\omega_d = 12.4 * \sqrt{1 - 0.35^2} = 11.62 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_d = 1.85 \text{ Hz} \quad (4.23)$$

Infine, per la trasmissibilità τ , si è deciso di rappresentare con l'utilizzo del software Matlab [Appendice C] il suo andamento in funzione di $\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ con valori differenti di ζ [Fig. 4.6] e il calcolo del suo valore massimo con $\zeta = 0.35$ utilizzando la formula (4.20):

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\left(2 * 0.35 * \frac{11.3}{12.4}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{11.3^2}{12.4^2}\right)^2 + \left(2 * 0.35 * \frac{11.3}{12.4}\right)^2}} = 1.797 \quad (4.24)$$

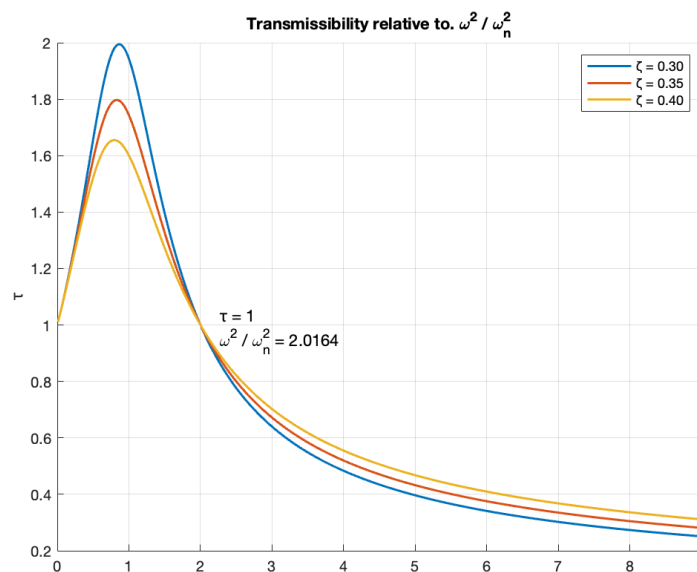


Figure 4.6 - Trasmissibilità con il software MATLAB

Ora per avere la conferma circa i valori della posizione $x(t)$ ricavati dal grafico, si procede al calcolo di essa, tramite la formula [4.19], in due istanti temporali differenti, uno nel range transitorio, e l'altro a regime:

- *pulsazione della massa oscillante scelta* $= 12.4 \frac{rad}{s}$
- *istante di tempo 1:* $t_1 = 0.2 \text{ s}$
- *istante di tempo 2:* $t_2 = 4 \text{ s}$

Si riportano i risultati:

- $x(0.2) = 49.6 \text{ mm}$
- $x(4) = -69.6 \text{ mm}$

Come è possibile notare dalla [Fig. xx] i valori appena citati e quelli calcolati dal software non sono esattamente uguali ma molto coerenti gli uni con gli altri. Quindi si può dedurre che i dati teorici sono in linea con quelli simulati a conferma della correttezza del lavoro svolto.

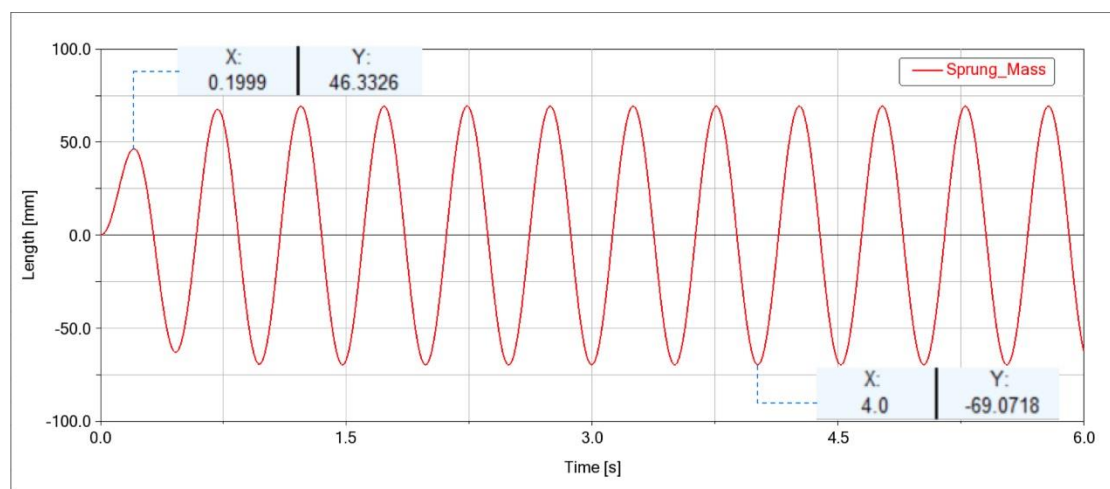


Figura 4.7- Analisi di posizione con $\omega = cost$

Si riporta nella seguente tabella i valori ricavati dalle formule precedentemente viste:

Tabella 4.1 Valori ottenuti

ω_n	$12.4 \frac{rad}{s} = 1.97 \text{ Hz}$
ω_d	$11.6 \frac{rad}{s} = 1.85 \text{ Hz}$
τ_{max}	1.797
c	$2.53 \frac{Ns}{mm}$
$x(t = 0.2 \text{ s}, \omega = \omega_n)$	49.6 mm
$x(t = 4 \text{ s}, \omega = \omega_n)$	-69.6 mm

CONCLUSIONI

In questa sezione si andrà ad analizzare i dati e le metodologie precedentemente descritte cercando di creare un nesso tra di loro e descrivendo il modello analizzato nel dettaglio, spiegando le sue caratteristiche e il perché di alcuni parametri definiti in fase progettuale dal costruttore.

Innanzitutto, si parte col dire che una buona sospensione deve garantire un certo range di frequenze nel quale le masse sospese della vettura oscillano in controfase rispetto all'andamento della strada, modellato nel caso corrente dal basamento. Infatti, come si può notare nella [Fig. 4.3] soltanto per i primi istanti di tempo ($t < 1.5$ s) l'oscillazione della massa sospesa è maggiore di quella del basamento, e non a caso, il valore massimo, si trova nel punto dove la trasmissibilità è massima ($\tau = 1.797$) in prossimità dei valori di ω_n , ω_d . Si può fare una stima su quanto appena detto: si considera la simulazione effettuata con la funzione *sweep* nella quale è stato impostato un range di frequenze che variano da 0.197 a 39.4 Hz in 15 secondi $\rightarrow \frac{39.4-0.197}{15} 0.75 = 1.96$ Hz valore in linea con i risultati precedentemente ottenuti [Fig. 4.4]. Questo effetto è voluto in quanto tendenzialmente nel campo delle sospensioni automobilistiche si cerca di far lavorare il sistema con il valore di $\frac{\omega^2}{\omega_n^2} > 2$.

L'unica criticità nel fare ciò è che si deve attraversare la risonanza, e infatti si cerca di superarla nel minor tempo possibile, ma il vantaggio è molto elevato, in quanto come si può vedere dal grafico della trasmissibilità [Fig. 4.4], da quel punto in poi, essa scende sotto l'unità tendendo ad un valore prossimo allo zero, isolando di fatto la vettura dalle vibrazioni. Infatti, il corpo può essere considerato isolato se oscilla rispetto al basamento con basse ampiezze e con un buon sfasamento tendente alla controfase.

Notare che per via di errori dovuti a semplificazioni nei calcoli, lettura dei valori dai grafici, precisione di essi e delle simulazioni, il punto di risonanza risulta non esattamente lo stesso, ma è un errore accettabile visto che ricade sempre tra il valore di ω_n , ω_d .

ANALISI INGRANAGGI

INTRODUZIONE

In questo capitolo si analizzerà la parte di trasmissione del moto effettuata tramite l'utilizzo di delle ruote dentate.

Grazie alla loro forma caratteristica, composta da una serie di denti che si incastrano tra loro, le ruote dentate consentono di trasferire il moto modificandone la direzione, la velocità o il momento del moto. In questo caso si analizzerà un componente automobilistico nel quale la trasmissione del moto attraverso le ruote dentate è fondamentale, il cambio. In particolare, andremo ad effettuare uno studio sulle ruote dentate che compongono la seconda marcia della Ferrari F40.

Esistono diversi tipi di ruote dentate, ognuno progettato per specifiche esigenze di trasmissione e applicazioni. Tra i più comuni ci sono le ruote dentate cilindriche, coniche, elicoidali e a dentatura interna. Nei normali cambi automobilistici si utilizzano ruote dentate elicoidali poiché esse presentano numerosi vantaggi rispetto alle ruote a denti dritti: maggiore potenza trasmissibile, maggior durata, minore vibrazione e rumore. Nello studio che si effettuerà, nonostante si sia considerato il fatto che le ruote reali siano elicoidali, si analizzeranno le ruote a denti dritti per semplicità nella trattazione e nello sviluppo di eventuali considerazioni. Gli ingranaggi a denti dritti, sono efficienti per carichi pesanti, ma generano più rumore. Nella coppia di ingranaggi si ha la ruota motrice (driver) che trasmette il moto facendo pressione sui denti della ruota condotta (driven) che gira in senso contrario alla prima.

Lo scopo principale di questa analisi è quello di analizzare le forze e pressioni in gioco sulle ruote dentate e individuare la coppia trasmessa attraverso esse.

CONSIDERAZIONI EFFETTUATE

In un cambio automobilistico la potenza viene trasmessa tra assi paralleli come è possibile vedere in [Fig.5.1] e al fine del nostro progetto si sono analizzate le ruote dentate presenti nel meccanismo della seconda marcia nel quale la ruota conduttrice ha 21 denti e la ruota condotta ne ha 36. I dati appena citati sono stati ricavati da [Fonte: F40_Technical_Manual].

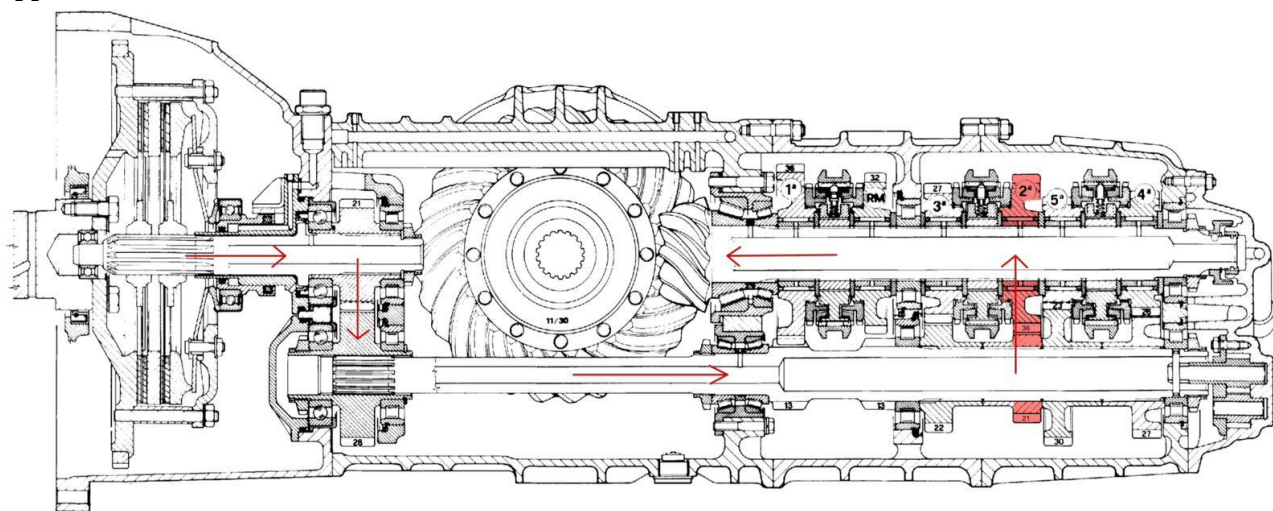


Figura 5.1 – Complessivo frizione-cambio-differenziale [Fonte: F40_Technical_Manual]

Vengono riportati nella [Tab.5.1] i parametri utilizzati nello sviluppo teorico, tenendo conto della semplificazione effettuata nel trattare ruote dentate a denti dritti e non ruote dentate elicoidali come precedentemente analizzato.

Tabella 5.1 – Valori caratteristici utilizzati

Denti ruota motrice	z_1	21
Denti ruota condotta	z_2	36
Angolo di pressione	α	20°
Modulo	m	3 mm
Larghezza di fascia	W	20 mm
Raggio generico	R'	51.57 mm
Coppia pignone	M	300 Nm
Modulo di Young	E	2.06×10^{11}
Coefficiente di Poisson	ν	0.3

SVILUPPO TEORICO

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza è possibile studiare le relazioni fondamentali per le ruote dentate a denti dritti:

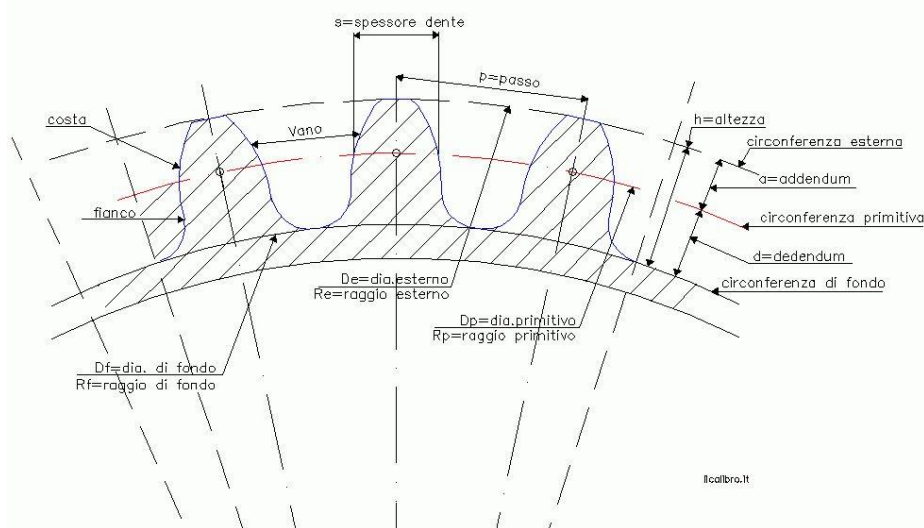


Figura 5.2 – Ruote dentate a denti dritti: nomenclature e definizioni

Si definisce raggio primitivo R , il raggio in cui la trasmissione avviene senza strisciamento tra i fianchi dei denti:

$$R = \frac{mz}{2} \quad (5.1)$$

m rappresenta il modulo, ovvero il rapporto tra il diametro primitivo e il numero di denti.

Il raggio di base r_b è il raggio che limita inferiormente la base dei denti:

$$r_b = R \cos \alpha \quad (5.2)$$

Il rapporto di trasmissione τ caratterizza come il movimento degli ingranaggi si trasferisce da una ruota ad un'altra:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \quad (5.3)$$

Il rapporto di ingranaggio/riduzione è il rapporto tra i denti della ruota maggiore e quella minore:

$$\frac{1}{\tau} \quad (5.4)$$

Il passo p identifica la distanza tra l'asse di due denti consecutivi:

$$p = \frac{2\pi R}{z} \quad (5.5)$$

Passo di base p_b :

$$p_b = \frac{2\pi r_b}{z} \quad (5.6)$$

Interasse tra le due ruote i :

$$i = R_1 + R_2 \quad (5.7)$$

Si definisce addendum a la sporgenza rispetto alla primitiva:

$$a = m \quad (5.8)$$

Il dedendum d rappresenta l'incavo rispetto alla primitiva:

$$d = 1.25m \quad (5.9)$$

Altezza totale del dente h :

$$h = r_e - r_i = a + d \quad (5.10)$$

Per quantificare il numero medio di denti in presa si definisce il rapporto di condotta r_c :

$$r_c = \frac{\overline{A_1 A_2}}{p_b} \quad (5.11)$$

Dove:

$$\overline{A_1 A_2} = \sqrt{r_{e,2}^2 - r_{b,2}^2} + \sqrt{r_{e,1}^2 - r_{b,1}^2} - i_l \sin \alpha_l \quad (5.12)$$

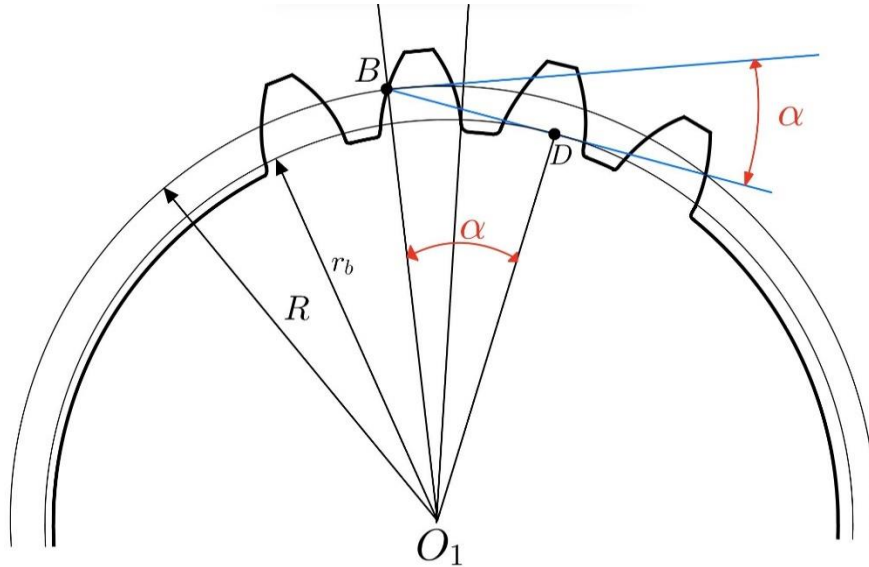


Figura 5.3 - Spessore del dente su un diametro generico

Si procede al calcolo dello spessore del dente ad una circonferenza generica della ruota condotta, conoscendo lo spessore di quest'ultimo alla circonferenza primitiva R'' tramite la formula (5.16). Ponendo $R'' = R_2$ e tramite un'opportuna proporzione si calcola il raggio R' ovvero il raggio generico al quale mi interessa calcolarmi lo spessore. Essendo $R'' = R_2$ si può anche affermare che $\alpha'' = \alpha$. Si calcola α' con la formula (5.13)

$$\alpha' = \cos^{-1} \frac{r_b}{R'} \quad (5.13)$$

Successivamente la funzione evolvente di α' e α'' in radianti:

$$\text{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (5.14)$$

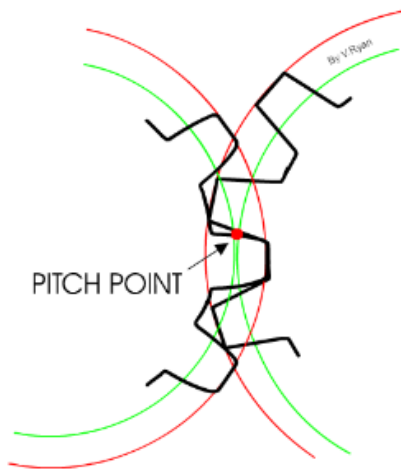
Infine, avendo noti i due angoli di pressione α' e α'' e uno dei due spessori si può ricavare direttamente il secondo spessore:

$$S'_r = r' \left(\frac{S''_r}{r''} + 2 \text{inv} \alpha'' - 2 \text{inv} \alpha' \right) \quad (5.15)$$

dove

$$S''_r = \frac{p}{2} \quad (5.16)$$

Inoltre, è possibile calcolare la pressione di contatto p al pitch point tramite la legge di Hertz, essa è di fondamentale importanza per valutare la presenza o meno del fenomeno del pitting (danneggiamento superficiale).



Il pitch point o centro di istantanea rotazione è il punto in cui i denti di due ingranaggi si incontrano durante la rotazione, è l'unico punto dove abbiamo puro rotolamento, in esso si invertono le velocità ed è approssimabile come il punto più caricato poiché c'è il minor numero di denti in presa.

$$p = \sqrt{\frac{F_n}{W\pi} \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}\right)}} \quad (5.17)$$

Figura 5.4 – pitch point

dove la forza F che si scambiano i denti dà luogo a due componenti, una tangenziale, F_t , ed una normale, F_n .

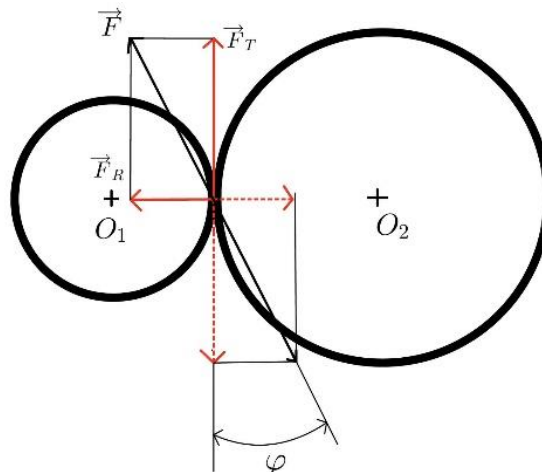


Figura 5.5 – Forze di contatto in presenza di attrito

La forza tangenziale F_t è quella responsabile del moto rotatorio:

$$F_t = \frac{M}{R} \quad (5.18)$$

La forza normale F_n costituisce una sollecitazione sull'albero su cui sono calettate le ruote:

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha} \quad (5.19)$$

Raggio di curvatura:

$$\rho = \sqrt{R^2 - R_b^2} \quad (5.20)$$

IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE

Si è implementato lo studio delle ruote dentate con il software MSC Adams, creando le due ruote dentate della seconda macia e imponendogli una legge di moto tale per cui si ha un'accelerazione nei primi 0.25s e poi una velocità costante.

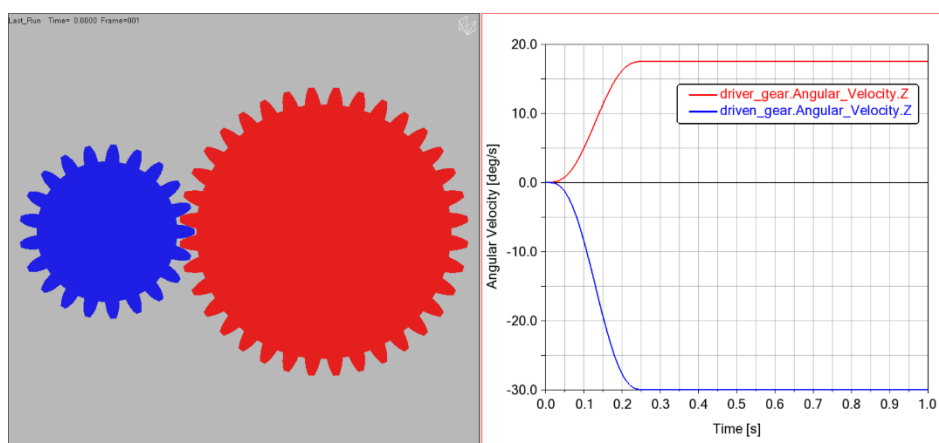


Figura 5.6 – Grafico velocità angolari nel software MSC Adams

Si sono quindi ricavate le velocità angolari $\omega_1 = 30 \frac{\text{deg}}{\text{s}}$ e $\omega_2 = 17.5 \frac{\text{deg}}{\text{s}}$

È possibile ricavarsi il rapporto di trasmissione:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{17.5}{30} = 0.583 \quad (5.21)$$

Per un'ulteriore analisi più specifica si è utilizzato il software KISSsoft, dove si modellano le ruote dentate considerando i parametri geometrici, tolleranze, materiali, tipo di lavorazione meccanica e lubrificazione, cosa che fornisce dei risultati più accurati.

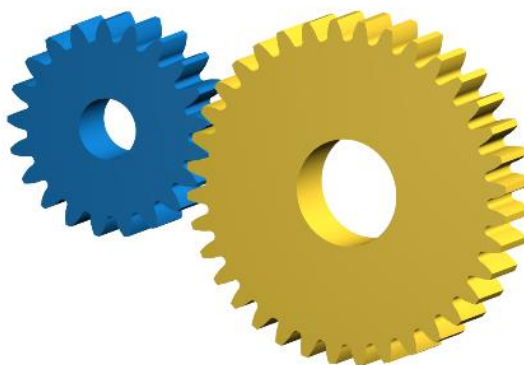


Figura 5.7 – Modello KISSsoft

Dopo aver impostato i parametri geometrici delle due ruote dentate si è ipotizzato un materiale che sia consono all'applicazione in questione. Il materiale scelto è un acciaio da cementazione 18CrNiMo7-6.

Successivamente, si inserisce la tipologia di lubrificazione e lubrificante tenendo conto del [F40_Technical_Manual]. La lubrificazione è a sbattimento ed usa un olio 75W90, come verificato dei dati di fabbrica.

Per le lavorazioni meccaniche e le tolleranze, essendo valori di non facile reperibilità, si è scelto di mantenere i valori standard suggeriti dal software.

La simulazione è stata impostata con un valore di coppia di 300 Nm sulla ruota motrice; sono stati ricavati i seguenti risultati:

KISSsoft

5 Geometry

5.1 Basic data

Gear ratio	[u]	1.714
Reference center distance (mm)	[ad]	85.500

5.2 Diameters and their allowances

		----- Gear 1 -----	Gear 2 -----
Reference diameter (mm)	[d]	63.000	108.000
Base diameter (mm)	[db]	59.201	101.487
Tip diameter (mm)	[da]	70.491	112.509

5.3 Tip clearances and tooth heights

		----- Gear 1 -----	Gear 2 -----
Addendum, $m_n(h_{a0}^*+x+k)$ (mm)	[ha]	3.745	2.255
	[ha.e/i]	3.745 / 3.730	2.255 / 2.237
Dedendum, $m_n(h_{d0}^*-x)$ (mm)	[hf]	3.005	4.495
	[hf.e/i]	3.101 / 3.156	4.592 / 4.647
Tooth height (mm)	[h]	6.750	6.750
0			

5.4 Tooth thickness and pitch

		----- Gear 1 -----	Gear 2 -----
Pitch on reference circle (mm)	[pt]	9.425	9.425
Base pitch (mm)	[pbt]	8.856	8.8562

6 General influence factors

6.1 Forces and circumferential speed

		----- Gear 1 -----	Gear 2 -----
Nominal circum. force at pitch circle (N)	[Ft]	9523.8	
Radial force (N)	[Fr]	3466.4	3466.4
Normal force (N)	[Fnorm]	10135.0	10135.0
Nominal circumferential force per mm (N/mm)	[w]	476.19	

8 Calculation of flank strength (pitting)

Contact stress at operating pitch circle (N/mm ²)	[σHw]	1716.822
---	-------	----------

Figura 5.8 – risultati forniti dalla simulazione KISSsoft

In allegato (sottocartella “GRUPPO_14_extra”) è possibile trovare il report completo. Si riporta in questo report una parte di tale report generato da KISSsoft.

RISULTATI

In questo paragrafo si mostrano i calcoli svolti mediante le formule esposte nel paragrafo dello sviluppo teorico:

Tabella 5.2 – Risultati

Rapporto di ingranaggio	$\frac{1}{\tau}$	1.714
Rapporto di trasmissione	τ	0.583
Passo	p	9.425 mm
Passo di base	p_b	8.856 mm
Raggio primitivo (motrice)	R_1	31.5 mm
Raggio di base	$r_{b,1}$	29.6 mm
Interasse	i	85.5 mm
Addendum	a	3 mm
Dedendum	d	3.75 mm
Altezza totale del dente	h	6.75 mm
Rapporto di condotta	r_c	1.63
Spessore del dente	S'_r	5.835 mm
Forza normale	Fn	10135.03 N
Pressione di contatto al Pitch Point	p	1637.8 MPa

CONCLUSIONI

In questa ultima parte riguardante l'argomento delle ruote dentate si procede con l'esposizione di alcune considerazioni in merito ai vari risultati ottenuti analiticamente e via software.

Il rapporto di condotta r_c essendo dai calcoli maggiore di 1 assicura una continuità di funzionamento ed un effetto benefico sulla resistenza dei denti, in quanto gli sforzi dovuti alle coppie vengono divisi quasi equamente tra più denti.

Inoltre, rispettando i parametri di progettazione per ruote dentate, è buona norma mantenere la pressione di contatto p ad un valore inferiore a 2000 Mpa per evitare problemi di eccessivo stress del materiale; come si può notare dalla [Tab. 5.2] il valore è al di sotto del limite di sicurezza.

Mediante al software per modellazione di ingranaggi KISSsoft, è possibile visualizzare come la pressione si distribuisca sul dente [Fig.5.9-5.10], andando di fatto ad evidenziare che la zona più tensionalmente caricata è quella in prossimità della linea del pitch point. In conclusione, si può notare come i valori riportati tramite le simulazioni effettuate tramite Adams View e KISSsoft sono coerenti con i risultati ottenuti tramite sviluppo analitico.

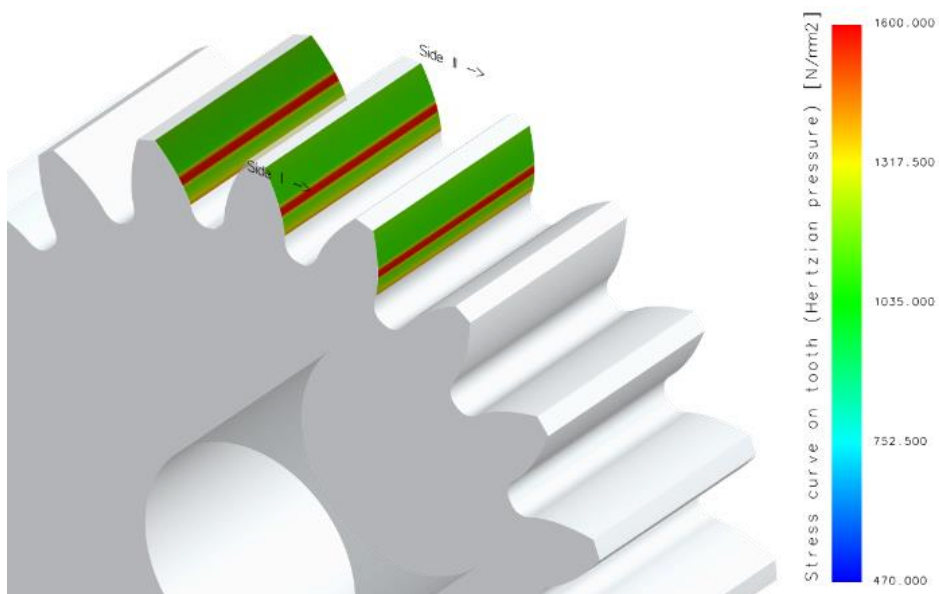


Figura 5.9 – andamento delle pressioni di contatto sui denti

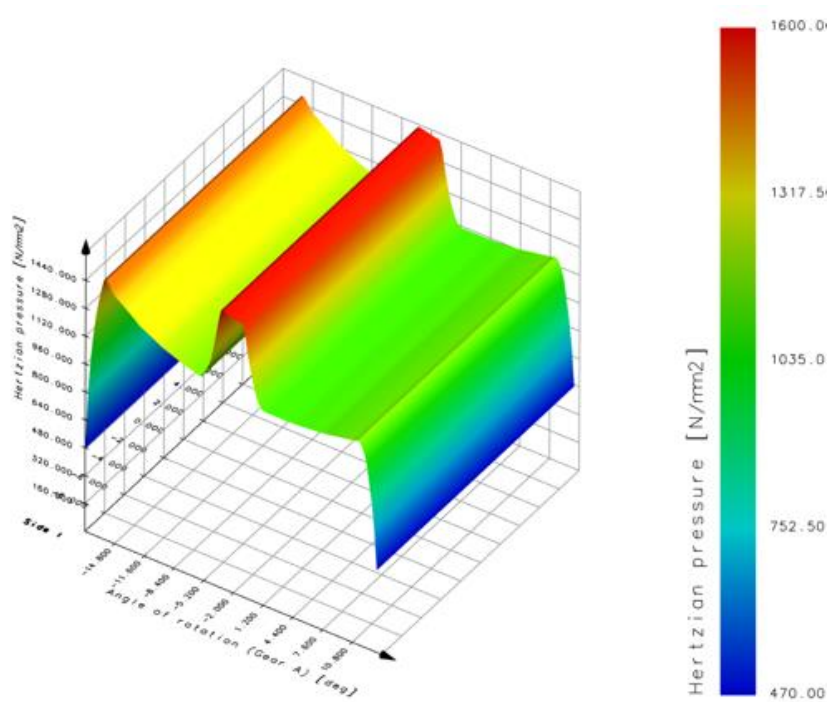


Figura 5.10 – grafico andamento delle pressioni lungo l'angolo di rotazione

APPENDICI

APPENDICE A

Codice per analisi di posizione e velocità:

```

clc
clear

%% Cinematismo
% dimensione vettori del quadrilatero
z1=248.56; z2=338.66; z3=282.74; z4=198.8;

% angoli statici del quadrilatero (theta3, theta4)
t3=271; t4=181;

% range angoli theta2
initial_angle = 45;
final_angle= 90;

%% Analisi posizione
for j=1:(final_angle - initial_angle)

    teta2rad=deg2rad(initial_angle+j);
    x0=[deg2rad(t3); deg2rad(t4)];
    kmax=1000; tol=1e-2;

    f1=@(x) z2*cos(teta2rad)+z3.*cos(x(1))+z4.*cos(x(2))-z1;
    f2=@(x) z2*sin(teta2rad)+z3.*sin(x(1))+z4.*sin(x(2));

    df11=@(x) -z3.*sin(x(1));
    df12=@(x) -z4.*sin(x(2));
    df21=@(x) z3.*cos(x(1));
    df22=@(x) z4.*cos(x(2));

    [x,k,info ] = newtonsis2(f1,f2,df11,df12,df21,df22,kmax,tol,x0);
    xrad=rad2deg(x);

    if info==0
        fprintf(' 02 = '); disp(rad2deg(teta2rad));
        fprintf(' 03 calcolato = '); disp(xrad(1));
        fprintf(' 04 calcolato = '); disp(xrad(2));
        fprintf(' Numero di iterazioni '); disp(k);
        fprintf(' ----- \n');
        teta2(j)=rad2deg(teta2rad);
        teta3(j)=xrad(1);
        teta4(j)=xrad(2);
    else
        fprintf(' Numero massimo iterazioni raggiunto ');
    end

    t=deg2rad(110);
    a=[0; z2*cos(teta2rad+t); z2*cos(teta2rad+t)+z3*cos(x(1)+t); z1*cos(t)];
    b=[0; z2*sin(teta2rad+t); z2*sin(teta2rad+t)+z3*sin(x(1)+t); z1*sin(t)];

    plot(a,b,'r','linewidth',1)
    grid on
    grid minor
    axis([-400 200 -200 400])

```

```

hold on
plot(a,b,'o','color','r','markersize',8)
xlabel('x [mm]')
ylabel('y [mm]')
title("Kinematic analysis of the front double wishbone position")

end

figure(2)
plot (teta2,teta3);
grid on
grid minor
hold on
plot (teta2,teta4);
xlabel('θ2 [°]')
ylabel('θ3 - θ4 [°]')
legend("θ3","θ4")
hold off
title("θ3 and θ4 variations respective to θ2")

%% Analisi velocita

r=input('Digita 1 per il calcolo della velocità, 2 per uscire: ');
if r==1
    fprintf('Calcolo delle velocità angolari del cinematisimo: Quadrilatero Articolato \n');
    a1=input('Inserisci il valore di θ2 di partenza: ');
    a2=input('Inserisci il valore θ2 finale: ');
    t=input('Inserisci Δt in secondi: ');
    w2=deg2rad((a2-a1)/t);

    %cerca la posizione del valore messo nell'input a1 nell'array teta2
    for i=1:45
        if a1==teta2(i)
            i1=i;
        end
    end

    dftx=[-z2*sin(deg2rad(teta2(i1))); z2*cos(deg2rad(teta2(i1)))];
    dfty=[-z3*sin(deg2rad(teta3(i1))) -z4*sin(deg2rad(teta4(i1))); z3*cos(deg2rad(teta3(i1))) z4*cos(deg2rad(teta4(i1)))];
    w=-inv(dfty)*(dftx*w2);
    fprintf('Velocità angolare [rad/s] w2='); disp(w2);
    fprintf('Velocità angolare [rad/s] w3='); disp(w(1));
    fprintf('Velocità angolare [rad/s] w4='); disp(w(2));

end

```

Funzione richiamata dal codice:

```

function[xn,k,info,Jk] = newtonsis2(f1 ,f2 ,df11 ,df12 ,df21 ,df22 ,kmax ,tol ,xc)
info=0;
F0(1)= f1(xc) ; F0(2)= f2(xc);
Fk=F0 ;

for k=1:kmax
    Jk(1,1)= df11(xc) ; Jk(1,2)= df12(xc) ; Jk(2,1)= df21(xc) ; Jk(2,2)= df22(xc);
    xn=xc-(inv(Jk))*Fk' ;
    Fk(1)= f1(xn) ; Fk(2)= f2 (xn);
    if norm( xn -xc)< tol && norm(Fk)< tol

```

```

    return
end
xc=xn;
end
info=1;
end

```

APPENDICE B

Codice utilizzato per elaborare e visualizzare i dati ottenuti da Lotus Shark:

```

clear
clc

%% Dati da Lotus Suspension Analysis
position = [40.000, 35.000, ..., -60.000, -65.000];

tire_forces = [4595.7847, 4358.718, ..., 156.9698, -54.9575];

spring_forces = [6751.6, 6421.9 ..., 238.7, -83.6];

spring_travel = [26.8343, 23.4638, ..., -39.7588, -43.0549]

%% Interpolazioni
% Curva interpolata per la forza del pneumatico
tire_fit_x = min(position):0.1:max(position);
tire_fit_y = interp1(position, tire_forces, tire_fit_x, 'spline');

% Curva interpolata per la forza della molla
spring_fit_x = min(position):0.1:max(position);
spring_fit_y = interp1(position, spring_forces, spring_fit_x, 'spline');

%% Grafico della forza verticale sullo pneumatico in funzione dello
% spostamento della ruota
figure;
hold on
plot(position, tire_forces, 'r', tire_fit_x, tire_fit_y, 'r', 'LineWidth', 1.5);

% Seleziona i punti sul grafico: 1 = bump 40mm, 17 = rebound 40mm
x1 = position(1);
x2 = position(17);
y1 = tire_forces(1);
y2 = tire_forces(17);

% Calcola la rigidità a terra (ground stiffness)
g_s = (y2 - y1) / (x2 - x1);

% Traccia la retta blu tra i due punti -40 e 40
plot([-40, 40], [y2, y1], 'b--', 'LineWidth', 1);

% Posizione per il testo della costante della molla
text_x = mean([x1, x2]);
text_y = mean([y1, y2]);

% Visualizza il valore della costante della molla
text(text_x + 3, text_y + 3, ['k = ', num2str(g_s), ' N/mm'], 'FontSize', 15, 'Color', 'blue', 'VerticalAlignment', 'cap', 'HorizontalAlignment', 'left');

title('Tire Force relative to wheel position');
grid on;
grid minor;
xlabel('Wheel position [mm]');
ylabel('Force [N]');

```

```

text(position, tire_forces, string(tire_forces), 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
hold off;

%% Grafico della forza sulla molla in funzione dello spostamento della ruota
figure;
plot(position, spring_forces, '.', spring_fit_x, spring_fit_y, 'LineWidth', 1.5);
title('Spring Force relative to wheel position');
grid on;
grid minor;
xlabel('Wheel position [mm]');
ylabel('Force [N]');
text(position, spring_forces, string(spring_forces), 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');

%% Grafico della forza sulla molla su forza sulla ruota
figure;
plot(spring_forces, tire_forces, 'LineWidth', 1.5);
title('Spring Force relative to Tire Force');
grid on;
grid minor;
xlabel('Spring Force [N]');
ylabel('Tire Force [N]');

%% Grafico dello spring travel su spring force
figure;
plot(spring_travel, spring_forces, 'LineWidth', 1.5);
hold on;

% Seleziona due punti sul grafico
% 1 = bump 40mm, 9 = condizione statica (auto a terra)
x1 = spring_travel(1);
x2 = spring_travel(9);
y1 = spring_forces(1);
y2 = spring_forces(9);

% Calcola la costante della molla (k)
k = (y2 - y1) / (x2 - x1);

% Posizione per il testo della costante della molla
text_x = mean([x1, x2]);
text_y = mean([y1, y2]);

% Visualizza il valore della costante della molla
text(text_x+4, text_y+4, ['k = ', num2str(k), ' N/mm'], 'FontSize', 15, 'Color', 'blue', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'left');

title('Spring Travel vs Spring Force');
xlabel('Spring Travel [mm]');
ylabel('Spring Force [N]');
grid on;
hold off;

%% Grafico della rigidità a terra (secante)

% Calcolo del delta della forza della molla rispetto alla condizione di position = 0
delta_spring_forces = tire_forces - tire_forces(9);

% Calcolo della rigidità per ogni posizione della ruota
stiffness = delta_spring_forces ./ position;

% Curva interpolata per la rigidità a terra
stiffness_fit_x = min(position):0.1:max(position);
stiffness_fit_y = interp1(position, stiffness, stiffness_fit_x, 'spline');

```

```
figure;
plot(position, stiffness, '-', stiffness_fit_x, stiffness_fit_y, 'LineWidth', 1.5);
text(position, stiffness, string(stiffness), 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
grid on;
grid minor;
title('Vehicle ground stiffness');
xlabel('Wheel travel [mm]');
ylabel('Stiffness [N/mm^2]');
```

APPENDICE C

Codice per calcolare e visualizzare l'equazione di trasmissibilità:

```
clear
clc

%% Trasmissibilità: forze trasmesse al basamento

ground_stiffness = 44842.2; % rigidezza secante [N/m]

vehicle_mass = 1350; % massa veicolo [kg]
susp_mass = 291.75; % massa sospesa ant sx [kg]

wn = sqrt(ground_stiffness/susp_mass);

a=0.1:0.01:3;
w = wn .* a;
r2 = w.^2 ./ wn^2;
r = w./wn;

figure;
hold on;

% Range valori zita
zita_range = 0.3:0.05:0.4;

for i = 1:length(zita_range)
    zita = zita_range(i);

    % equazione trasmissibilita
    t = sqrt((2 .* zita .* r).^2 + 1) ./ sqrt((1 - r2).^2 + (2 .* zita .* r).^2);

    plot(r2, t, 'LineWidth', 1.5);
end

%% Trova intersezione

for i = 1:length(t)
    if t(i) > 0.1 && t(i) < 1
        intersection_point = r2(i);
        break;
    end
end

text(intersection_point + 0.25, 1, ['\omega^2 / \omega_n^2 = ', num2str(intersection_point)], 'VerticalAlignment', 'top',
'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', 11);
text(intersection_point + 0.25, 1, '\tau = 1', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', 11);

%% Plot
xlabel('\omega^2 / \omega_n^2');
```

```
ylabel('τ');  
title('Transmissibility relative to.  $\omega^2 / \omega_n^2$ ');  
grid on;  
legend(cellstr(num2str(zita_range', 'ζ = %0.2f')));
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Manuale Tecnico Ferrari F40 U.S Versione 1992 Model, Ferrari S.p.A.
- [2] Meccanica Applicata alle Macchine, M. Callegari P. Fanghella F. Pellicano, 2022.
- [3] Costruzione di Macchine, A. Strozzi, 2022.
- [4] www.automobile-catalog.com
- [5] Appunti di Calcolo Numerico & Software Matematico
- [6] Appunti di Impostazione e Sviluppo di veicoli FSAE
- [7] Appunti di Analisi II